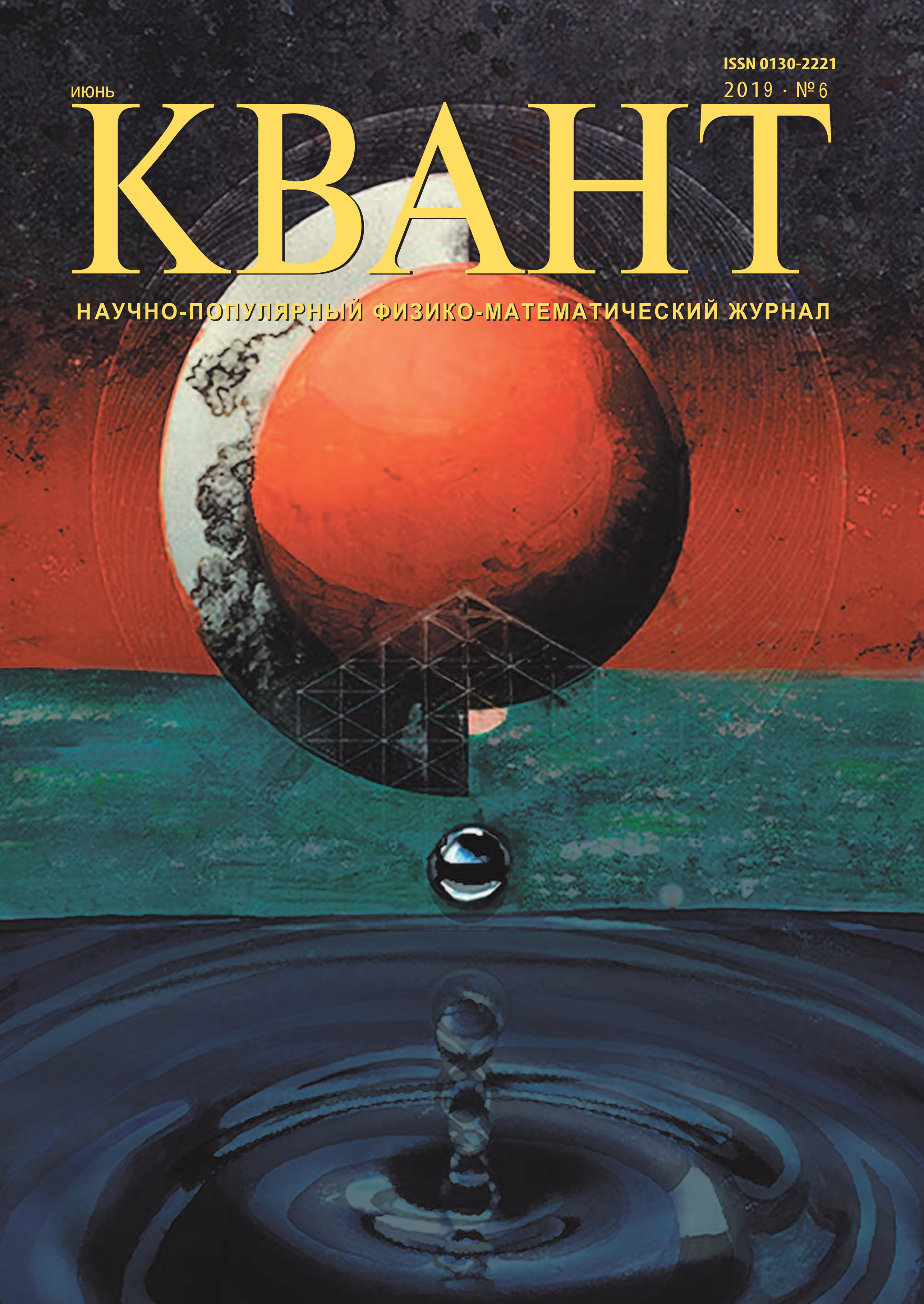
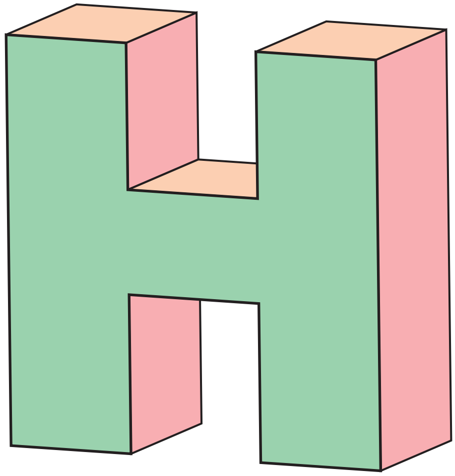
ISSN 0130-2221
ИЮНЬ
2019 · №6

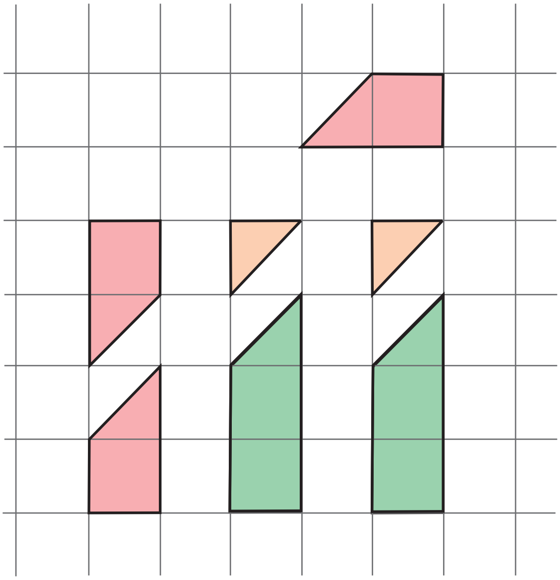
КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



Буква





Эта головоломка финского автора Весы Тимонена (Vesa Timonen) состоит из семи деталей. Они показаны на фото и схематично изображены на рисунке. Задача формулируется просто: сложить фигуру, которая выглядит как заглавная буква Н.

Начав решать головоломку, вы довольно быстро обнаружите, что это задание выполнить очень легко, причем несколькими способами. Проблема только в том, что в них используется лишь шесть деталей, а одна каждый раз остается лишней. Поэтому эти решения не считаются. А чтобы решить головоломку «по-настоящему», вам потребуется нестандартный взгляд на нее.

Желаем успехов!

Е.Епифанов

КВАНТ ИЮНЬ 2019 № 6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

О точных степенях и не только

А.КОРЧЕВСКИЙ

Сокровищница теории чисел, или арифметики, как эту область называли раньше, поистине неисчерпаема. Многие тайны простых чисел сегодня раскрыты. Но перенесем луч света на другие замечательные числовые последовательности – и загадок у них может быть отнюдь не меньше, чем у старых добрых и таких непростых «простых» чисел.

В начале 80-х годов прошлого века, будучи учеником физико-математической школы, автор интересовался различными «расширениями» понятия простых чисел. Простые числа (как наши читатели, безусловно, помнят) – это те самые, которые не делятся ни на одно число, кроме 1 и самого себя. Из простых чисел, как из кирпичиков, складываются все остальных числа, и скрепляющий цемент – операция умножения. Что если мы попробуем «склеивать» ряд натуральных чисел с помощью другого раствора – например, операции возведения в степень? Так автором была придумана «игра в целые степени», которой были посвящены долгие часы досуга. Пользуясь образцом простых чисел, можно попытаться построить целый город или даже королевство, где жили бы их родственники – натуральные числа, которые нельзя представить в виде степени a^b, где a и b – натуральные числа, $b > 1$. Приглашаем читателя поучаствовать в этой игре. Возможно, кто-то сможет выдумать и другие игры, похожие на эту. Милости просим, а пока…

Королевство точных степеней

Выпишем несколько первых членов последовательности *точных степеней*:

$$1,\ 4,\ 8,\ 9,\ 16,\ 25,\ 27,\ 36,\ \ldots$$

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190601

Если же натуральное число не является точной степенью, будем для краткости называть его *НЕстепенью*. (По-английски точные степени именуются perfect powers, а числа, не являющиеся точными степенями, – not perfect powers или, более коротко, non-powers. Будучи школьником, автор придумал для НЕстепеней имя sonor, или «сонорные числа», так что наше королевство можно называть «королевством сонорных чисел».)

Итак, НЕстепени – это:

$$2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ \ldots$$

Не составляет труда показать, что существует бесконечное количество НЕстепеней (например, поскольку каждое простое число является НЕстепенью).

Упражнение 1. а) Докажите, что если для некоторого простого числа p число n делится на p, но не делится на p^2, то оно не является точной степенью. б) Докажите, что множество составных НЕстепеней бесконечно.

В каталоге целочисленных последовательностей oeis.org последовательность точных степеней имеет код A001597, а НЕстепени – код A007916. В этом же каталоге можно найти ссылки на интересные статьи о свойствах последовательностей.

Основная теорема

Основная теорема арифметики говорит о том, что каждое натуральное число $N > 1$ может быть единственным образом (с точностью до порядка сомножителей) представлено в виде $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ являются различными простыми числами, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – натуральные числа.

Аналог этой теоремы есть и для НЕстепеней. Если число $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ является точной t-й степенью, то t должно быть делителем каждого из значений $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Тогда понятно, что $НОД(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1$, если N – НЕстепень и $НОД(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)>1$, если N – точная степень. Теперь мы можем определить «наибольший целый корень» для каждого натурального N как наибольшее натуральное t, при котором $N^{1/t}$ является целым. Ясно, что $t = НОД(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Из этого утверждения сразу следует, что наибольший целый корень t существует для любого $N > 1$ и что при этом $N^{1/t}$ – НЕстепень. Отсюда, мы можем вывести следующий факт.

Теорема 1. *Каждое натуральное $N > 1$ может быть представлено единственным образом в форме $N = m^t$, где m – НЕстепень, а t – натуральное.*

Упражнение 2. Докажите, что если N одновременно равно некоторой степени натурального числа a и некоторой степени натурального b, то a и b являются степенями некоторого натурального c.

Как **следствие теоремы 1**, можем получить следующий любопытный факт.

Каждое натуральное $N \geq 2$ может быть единственным образом представлено в виде *башни степеней* (так называемая power tower) $N = m_1^{m_2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{m_k}}}}}$, где k – некоторое натуральное число, а $m_1, m_2, \ldots, m_k$ – НЕстепени.

Доказательство. Применим индукцию по N. Если N – НЕстепень (в частности, если $N = 2$), то $k = 1$ и $m_1 = N$, иначе, в согласии с представлением $N = m^t$, $t \geq 2$, из теоремы 1, имеем $m_1 = m$, и теперь достаточно для $t < N$ воспользоваться существованием и единственностью представления $t = m_1^{m_2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{m_k}}}}}$.

«Степенное решето»

Для нахождения всех простых чисел не больше заданного числа имеется известный несложный алгоритм, называемый решетом Эратосфена. Суть этой процедуры такова: среди чисел 2, 3, …, N берем наименьшее простое число (это число 2) и вычеркиваем все числа, кратные ему, кроме него самого. На следующем этапе берем наименьшее невычеркнутое число и снова вычеркиваем все числа, кратные ему, кроме него самого. Действуем так далее. В результате вычеркнутыми (хотя бы один раз) окажутся все составные числа, а простые останутся невычеркнутыми.

Отталкиваясь от нашей основной теоремы 1, мы может построить аналог решета для НЕстепеней. Эта схема проиллюстрирована на рисунке 1: берем наименьшую

m–НЕстепень	2	3	5	6	7	10	*	*
m^2	4	9	25	36	49	100	*	*
m^3	8	27	125	216	343	1000	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*
m^k	2^k	3^k	5^k	6^k	7^k	10^k	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*

Рис. 1. «Степенное решето»

НЕстепень (это число 2) и вычеркиваем все его степени (первый столбец), кроме него самого. Находим наименьшее невычеркнутов число, оно будет НЕстепенью, снова вычеркиваем его степени и т.д.

Каждое натуральное число $N > 1$ может быть найдено в данной таблице один и только один раз.

«На границах королевства»

Поговорим о распределении точных степеней «ближе к бесконечности».

Читателям, которые интересовались проблемами простых чисел, наверняка известны результаты о функции $\pi(x)$, равной количеству простых чисел, не превышающих x: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi(x)}{x}=0$ и более точная асимптотика $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi(x)\ln x}{x}=1$.

Картина «степенного решета» может создать впечатление, что НЕстепени встречаются в натуральном ряду реже точных степеней: в таблице на рисунке 1 НЕстепени занимают только одну горизонтальную строку, по сравнению с бесконечным количеством рядов, занимаемых точными степенями. В действительности это не так.

НЕстепени составляют доминирующую часть натурального ряда (рис.2). Среди первых 100 миллионов натуральных чисел 99,98% являются НЕстепенями, т.е.

x	$p(x)$	Доля $p(x)$ от x (в процентах)
10	4	40
100	13	13
1000	41	4,1
10000	125	1,25
100000	367	0,367
1000000	1111	0,1111
10000000	3395	0,03395
100000000	10491	0,010491
1000000000	32670	0,003267
10000000000	102231	0,00102231
100000000000	320990	0,00032099
1000000000000	1010196	0,00010102
10000000000000	3184139	0,00003184
100000000000000	10046921	0,00001005
1000000000000000	31723592	0,00000317

Рис. 2. Количество $p(x)$ точных степеней, не превышающих x

точная степень – довольно редкая находка в натуральном ряду, а НЕстепеней, наоборот, «очень много». Далее, чтобы сформулировать точные результаты, введем функцию $p(x)$ – количество точных степеней, не превышающих положительного числа x.

Теорема 2. *а)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{p(x)}{x}=0$.

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{p(x)}{\sqrt{x}}=1$.

Доказательство. а) Для доказательства этого пункта достаточно провести грубую оценку количества точных степеней a^b, не превосходящих некоторого $x>1$. При фиксированном $b\ge 2$ имеем $a\le\sqrt[b]{x}\le\sqrt{x}$, так как при $a>\sqrt[b]{x}$ получим $a^b>x$. Можно считать, что $b\le\log_2 x$, так как при $a\ge 2$ и $b>\log_2 x$ число a^b будет больше x (а случай $a=1$ приводит к $a^b=1$, которое уже учтено при $b=2$). Таким образом, всего остается в рассмотрении не более $\sqrt{x}\log_2 x$ пар a, b, для которых $a^b\le x$. Отсюда $p(x)\le\sqrt{x}\log_2 x$ и $\dfrac{p(x)}{x}\le\dfrac{\log_2 x}{\sqrt{x}}$. Из стандартного курса анализа известно, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_\alpha x}{x^\beta}=0$ для любых $\alpha>0$, $\beta>0$. Отсюда получаем требуемое.

б) Уточним оценку из пункта а). Прежде всего заметим, что имеется $\left[\sqrt{x}\right]$ точных квадратов, не превосходящих x, в частности $p(x)\ge\left[\sqrt{x}\right]$. При фиксированном $b\ge 3$ имеем $a\le\sqrt[b]{x}\le\sqrt[3]{x}$ и можем считать, что $b\le\log_2 x$. Итого $\sqrt{x}-1\le$ $\le p(x)\le\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\log_2 x$. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}\log_2 x}{\sqrt{x}}=0$, получаем требуемое.

Теорема доказана.

Среди всех точных степеней чаще всего встречаются точные квадраты. Утверждение б) теоремы 2 согласуется с этим неформальным тезисом.

Близкие точные степени

Из теоремы 2 можно вывести, что для любого заданного N в натуральном ряду можно отыскать N подряд идущих НЕстепеней. Тем не менее, покажем, как отыскать длинный отрезок натурального ряда, состоящий из НЕстепеней, конструктивно. Для этого можно воспользоваться упражнением 1,а. Достаточно, например, потребовать, чтобы первое число в ряду было четным, но не делилось на 4, второе – делилось на 3, но не на 9, и т.д., i-е число в ряду делилось на очередное простое p, но не на p^2.

Упражнение 3. Реализуйте этот план, например, рассматривая систему сравнений $x+i\equiv p_i\left(\operatorname{mod} p_i^2\right)$, $i=1,\ldots,k$.

Указание. Воспользуйтесь китайской теоремой об остатках.

С вопросом о том, каким образом (и как далеко друг от друга) расположены в натуральном ряду точные степени, связаны многие знаменитые теоретико-числовые задачи и гипотезы (в некотором смысле, великая теорема Ферма относится к той же области вопросов).

Можно рассмотреть разности между последовательными точными степенями. Отсчитаем сто таких разностей, начиная с самой первой. Затем переместимся к следующей точной степени и снова подсчитаем среднее между ста разностями. Таким образом строится так называемое скользящее среднее. На рисунке 3 показано, как ведет себя это среднее при возрастании

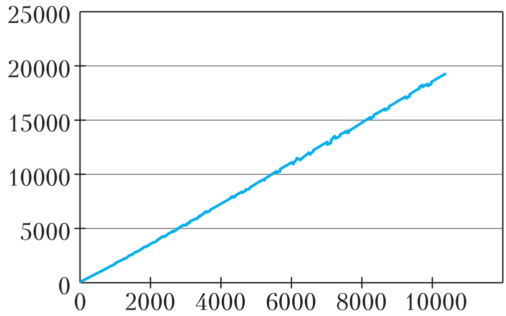


Рис. 3. Скользящее среднее разностей между последовательными точными степенями

«точки отсчета» x. Для последовательности точных квадратов, в силу равенства $(n+t)^2 - n^2 = 2nt + t^2$, скользящее среднее представляло бы собой линейную функцию. На рисунке видно, что более высокие степени вносят некоторые, впрочем не очень заметные, «биения».

А могут ли встретиться много подряд идущих натуральных чисел, каждое из которых – точная степень (в принципе, теорема 2 этого не запрещает)? Следующее упражнение дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Упражнение 4. Докажите, что не существует четырех идущих подряд натуральных чисел, являющихся точными степенями.

Указание. Одно из двух последовательных четных чисел не делится на 4.

В 2002 году Преда Михайлеску доказал так называемую гипотезу Каталана о том, что 8 и 9 являются единственной парой соседних натуральных чисел, являющихся точными степенями (см., например, статью В.Сендерова и Б.Френкина «Гипотеза Каталана» в «Кванте» № 4 за 2007 г.). Более общий вопрос о том, что расстояние между соседними точными степенями стремится к бесконечности с возрастанием порядкового номера, остается открытой проблемой.

Упражнение 5. Покажите, что эта гипотеза эквивалентна следующему утверждению: для любого натурального k существует лишь конечное множество решений уравнения $x^m - y^n = k$ в натуральных $x, y, m \geq 2$, $n \geq 2$.

Еще более общая гипотеза Пилаи гласит, что для любых натуральных a, b, k существует лишь конечное множество решений уравнения $ax^m - by^n = k$ в натуральных $x, y, m \geq 2$, $n \geq 2$.

Прогресс с прогрессиями

Как мы видели, длинных отрезков, т.е. арифметических прогрессий с разностью 1, состоящих из НЕстепеней, не существует. А как насчет (непостоянных) арифметических прогрессий с произвольной разностью? Классический результат (возможно, впервые доказанный Ферма) гласит, что не существует четырехчленной арифметической прогрессии из точных квадратов (об усилении этого результата см. также задачу М2025 «Задачника «Кванта» в №6 за 2006 г.). А для любого $n \geq 3$ не существует арифметической прогрессии из трех точных n-х степеней. Для $n = 3$ и $n = 4$ этот факт был доказан более 100 лет назад Кармайклом. Случай произвольного $n \geq 3$ был доказан сходными методами через несколько лет после доказательства большой теоремы Ферма.

Тем не менее, в натуральном ряду существуют сколь угодно длинные арифметические прогрессии из точных степеней. Построить такие прогрессии можно так. На начальном этапе конструирования возьмем произвольную прогрессию из N натуральных чисел, например $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, …, $a_N = N$, и набор простых (или попарно взаимно простых) чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Идея – подобрать множитель M вида $M = a_1^{s_1} \ldots a_N^{s_N}$ так, чтобы в прогрессии $Ma_1, Ma_2, \ldots, Ma_N$ число на i-м месте являлось бы точной p_i-й степенью. Для этого достаточно подобрать показатели $s_1, \ldots, s_N$ так, чтобы s_j делилось на p_i при $j \neq i$ и $s_i + 1$ делилось на p_i.

Упражнение 6. Реализуйте указанный план.

Указание. Воспользуйтесь китайской теоремой об остатках.

Для сравнения вспомним знаменитый результат 2004 года – теорему Грина–Тао о наличии в натуральном ряду сколь угодно длинных арифметических прогрессий из простых чисел. Следующее упражнение показывает, что в длинных арифметических прогрессиях из простых чисел или из точных степеней должны быть очень большие разности, несоизмеримо больше, чем количество членов прогрессии.

Упражнение 7. Пусть дана арифметическая прогрессия с разностью d, состоящая из $2p$ натуральных чисел, где p – простое число. Докажите, что в каждом из случаев а), б) d делится на p.

а) Все члены прогрессии – простые числа.

б) Все члены прогрессии – точные степени.

(См. также задачу М2202 «Задачника «Кванта» в №6 за 2010 г.).

Указание. Если d не делится на p, то в прогрессии длины p встретятся все остатки по модулю p, значит, в прогрессии длины $2p$ найдутся 2 числа, делящихся на p.

Теперь займемся бесконечными арифметическими прогрессиями $a + nd$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где a и d – фиксированные натуральные числа, так что d – разность прогрессии, а a – ее первый член. Заметим, что все члены прогрессии с разностью d дают один и тот же остаток при делении на d.

Знаменитая теорема Дирихле гласит, что при $\text{НОД}(a,d) = 1$ в бесконечной арифметической прогрессии $a + nd$ присутствует бесконечное количество простых чисел. А что можно сказать о точных степенях и НЕстепенях в арифметической прогрессии?

Из теоремы 1 можно вывести, что в любой бесконечной арифметической прогрессии $an + b$, где a, b – данные положительные числа, существует бесконечное количество НЕстепеней. Несложно дать и конструктивное обоснование этого факта (см. упражнение ниже).

Упражнение 8. Пусть p – простое число, на которое не делится d. Докажите, что в прогрессии $a + nd$ найдутся числа, делящиеся на p, но не делящиеся на p^2.

Указание. В такой прогрессии встретятся все остатки при делении на p^2.

Не так сложно привести примеры бесконечных арифметических прогрессий, в которых нет точных степеней.

Упражнение 9. Сделайте это.

Указание. Используйте идею упражнения 1. Разность прогрессии можно взять равной p^2.

Однако если первый член и разность прогрессии взаимно просты, то точные степени в прогрессии найдутся.

Теорема 3. *Пусть a, d – взаимно простые натуральные числа. Тогда среди чисел вида $a + nd$ найдется точная степень.*

Доказательство. Если $a = 1$, в нашей прогрессии будет всякая степень вида $(1 + nd)^k$.

Если же $a > 1$, то в прогрессии можно отыскать степень числа a. Действительно, в ряду чисел $a, a^2, a^3, \ldots$ найдется пара чисел a^t и a^s, $t < s$, дающих одинаковые остатки при делении на d. Тогда $a^s - a^t = a^{t-1}\left(a^{s-t+1} - a\right)$ делится на d. В силу взаимной простоты a и d получается, что $a^{s-t+1} - a$ делится на d, т.е. $a^{s-t+1} - a = dn$, или $a^{s-t+1} = a + dn$. Значит, a^{s-t+1} и есть искомая степень.

Упражнения

10. Докажите, что бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел, содержащая по крайней мере одну точную k-ю степень, содержит и бесконечное количество точных k-х степеней.

(См. также, например, задачу М2059 «Задачника «Кванта» в №5 за 2007 г.)

Указание. Вместе с c^k прогрессия должна содержать число $(c + d)^k$.

11. а) Докажите, что утверждение теоремы 3 перестает быть верным после замены слов «точная степень» на «точный квадрат». (Иными словами, существуют прогрессии $a + dn$, где

НОД $(a, d) = 1$, не содержащие точных квадратов.)

б) Докажите, что утверждение теоремы перестает быть верным после замены слов «точная степень» на «точная k-я степень» (для фиксированного $k \ge 2$).

Указание. Достаточно предъявить d такое, что k-е степени пробегают не все возможные остатки при делении на d (или, эквивалентно, среди чисел $0^k, 1^k, \ldots, (d-1)^k$ найдутся числа, дающие одинаковые остатки при делении на d).

Возвратимся еще раз к теореме Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях. На самом деле, эта теорема имеет красивое усиление, которое в виде гипотезы формулировали Лагранж и Дирихле, а доказал Валле-Пуссен. Неформально, это усиление гласит, что для любого натурального d простые числа «распределены поровну» между остатками, взаимно простыми с d (скажем, на большом начальном отрезке натурального ряда простых чисел вида $3d + 1$ и вида $3d + 2$ «примерно поровну»). Формальное утверждение таково. Для каждого $t \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$ такого, что $\text{НОД}(t, d) = 1$, определяется функция $\pi_{d,t}(x)$, равная количеству простых чисел вида $t + nd$, не превосходящих x. Тогда $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\pi_{d,t}(x)}{\pi_{d,1}(x)} = 1$.

Заметим, что обобщить теорему 3 в таком же ключе не удается. Например, в прогрессии $3d + 1$ «гораздо больше» точных степеней, чем в прогрессии $3d + 2$, так как в последней нет точных квадратов.

Удивительные суммы

Завершая прогулку по королевству, покажем, как вычислить некоторые (бесконечные) суммы, где суммирование производится по всем НЕстепеням (или, наоборот, по точным степеням). Например, верна следующая теорема.

Теорема 4. $\displaystyle\sum_{m\ -\ \text{НЕстепень}} \frac{1}{m^2 - 1} = \frac{\pi^2}{6} - 1$.

Последовательность НЕстепеней весьма нерегулярна, поэтому возможность найти точное значение подобной суммы может по праву вызвать удивление. Но сейчас секрет будет раскрыт: используя идею «степенного решета», мы сможем трансформировать различные суммы в суммы с «НЕстепенным» индексом суммирования. Приведем соответствующую выкладку, опуская объяснения, почему в данном случае возможно изменение порядка слагаемых в данной бесконечной сумме (знакомые с анализом читатели могут дать строгое обоснование).

Как известно, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Отсюда

$$\frac{\pi^2}{6} - 1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$$

$$= \sum_{m\ -\ \text{НЕстепень}} \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{\left(m^2\right)^2} + \frac{1}{\left(m^3\right)^2} + \ldots \right).$$

Сумма геометрической прогрессии в скобках равна $\dfrac{1}{m^2 - 1}$, откуда и получаем нужный результат.

Конечно, тождества, аналогичные равенству из теоремы 4, можно вывести и для более общих сумм вида

$$\sum_{m\ -\ \text{НЕстепень}} \frac{1}{m^s - 1}.$$

Упражнение 12. Вычислите

$$\sum_{q>1\ -\ \text{точная степень}} \frac{1}{q^2 - 1}.$$

Указание. Используйте равенство

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{3}{8}.$$

Предлагаем читателю проделать похожие преобразования с суммой $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ (вместо суммы $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ из теоремы 4) и вывести красивое равенство, известное как формула Гольдбаха или теорема Гольдбаха–Эйлера (Goldbach–Euler theorem):

$$\sum_{m>1\ -\ \text{точная степень}} \frac{1}{m-1} = 1.$$

Автор благодарит редакцию за предложенные улучшения и дополнения в разделах об асимптотике и о прогрессиях, а также добавление упражнений.

Поверхностное натяжение и температура

С.ВАРЛАМОВ

НА РИСУНКЕ 1, ВЗЯТОМ ИЗ СПРАВОЧника «Физические величины» (под редакцией И.С.Григорьева и Е.З.Мейлихова), видно, что зависимости коэффициентов поверхностного натяжения σ для раз-

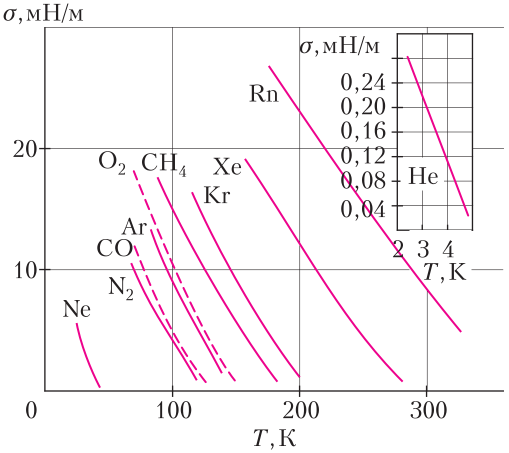


Рис. 1

ных сжиженных газов выглядят похожим образом – они весьма близки к линейным. Диапазон температур, в котором существует жидкое состояние вещества, для каждого вещества определяется двумя точками: температурой плавления (а точнее, температурой тройной точки) и критической температурой. Пользуясь моделью взаимодействия молекул, размеры которых D, можно дать объяснение этим зависимостям. Суть в том, что у молекул, находящихся на поверхности раздела конденсированной и газообразной фаз вещества, усредненное число $Z_{\text{пов}}$ ближайших соседок, каждая из которых обеспечивает молекуле на поверхности вклад в глубину потенциальной ямы U_0, меньше соответствующего числа $Z_{\text{внутр}}$ соседок у молекул, находящихся внутри конденсированной фазы. С ростом температуры плотность газообразной фазы растет, а плотность конденсированной фазы убывает, и это соответствует уменьшению разницы $\left(Z_{\text{внутр}} - Z_{\text{пов}}\right)$. В результате микроскопическая поверхностная энергия, приходящаяся на площадку с размерами порядка размеров одной молекулы ($S \approx D^2$) и равная

$$\sigma = \frac{U_0\left(Z_{\text{внутр}} - Z_{\text{пов}}\right)}{D^2},$$

убывает с ростом температуры.

При низких температурах поверхность жидкости почти плоская, это похоже на поверхность моря в отсутствие ветра (рис.2, слева). А если температура высокая, то поверхность получается «развитая» – как поверхность моря, покрытая волнами (рис.2, справа). Чем выше температура, тем больше получается реальная площадь поверхности раздела «жидкость–пар» при том же самом «теоретическом» периметре этой поверхности. Этот образ – поверхность моря с волнами – позволяет понять, почему для увеличения поверхности на ΔS нужна дополнительно к работе внешних сил теплота и почему с ростом температуры уменьшается коэффициент поверхностного натяжения.

Законно поставить вопрос: а каков вклад во внутреннюю энергию жидкости участка ее поверхности, который имеет площадь S_0 (плоская поверхность, ограниченная периметром), и как этот вклад зависит от температуры?

Если рассматривать поверхностный слой молекул как промежуточную фазу веще-

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190602

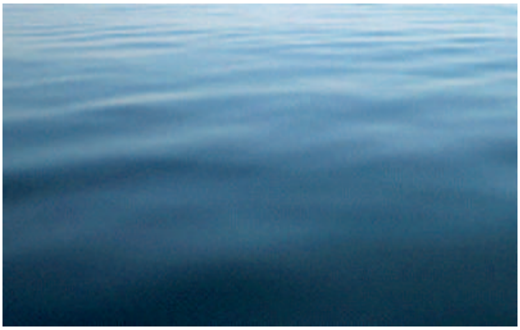
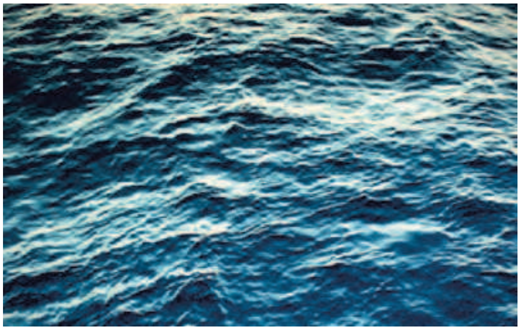



Рис. 2

ства (между конденсированным и газообразным состоянием), то для перевода молекул из конденсированной фазы в эту промежуточную фазу нужно сообщить им дополнительную тепловую энергию и при этом внешние силы должны совершить механическую работу. В результате внутренняя энергия увеличивается. Ситуация здесь аналогична переходу вещества из конденсированного состояния в газообразное. Отличаются только знаки работ внешних сил. При испарении вещества внешние силы (силы давления снаружи) совершают отрицательную работу, а при увеличении площади поверхности жидкости внешние силы совершают положительную работу. Собственно, именно поэтому давление насыщенных паров растет с ростом температуры, а коэффициент поверхностного натяжения уменьшается.

Если считать, что на проведенной (мысленно) границе, выделяющей участок поверхности жидкости S_0, поверхность жидкости колеблется, то среднее значение косинуса угла α между реальной поверхностью жидкости и плоской поверхностью S_0, натянутой (мысленно) на границу, вместе с микроскопической величиной поверхностной энергии σ, приходящейся на единицу площади, определяют проекцию силы натяжения прямого участка границы длиной ΔL_0 на плоскую поверхность: $\sigma \Delta L_0 \cos\alpha$. С другой стороны, если мысленно провести к «средней» по времени плоскости поверхности жидкости перпендикулярно ей плоскость и зафиксировать длину отрезка пересечения (части периметра), то при выделенном мысленно «прямом» отрезке периметра «реальная» длина границы раздела за счет волнистости поверхности будет больше. Если угол между «прямым» участком границы и реальным равен β, то реальная длина участка поверхности стала больше: $\Delta L_0/\cos\beta$. И вместе эти два фактора в среднем по времени должны компенсировать друг друга. Так как средние значения углов наклона α и β, очевидно, одинаковые, то усредненное значение проекции силы на плоскую поверхность будет равно

$$\sigma \Delta L_0 \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \approx \sigma \Delta L_0 ,$$

где σ – величина коэффициента поверхностного натяжения, приводимая в справочнике.

Внешние силы при увеличении площади поверхности жидкости на S_0 совершают работу

$$A = \sigma S_0 .$$

При этом дополнительная тепловая энергия Q, нужная для того, чтобы при увеличении площади «плоской» поверхности на S_0 сохранилась температура жидкости, на самом деле идет на то, чтобы создалась дополнительная бóльшая площадь поверхности. Измеренная суммированием по всем микроскопическим изгибам поверхности площадь может быть в несколько раз больше площади поверхности: $S_0 \to S = S_0 k$, где $k > 1$. В итоге закон сохранения энергии $Q + A = \Delta U$ дает такое соотношение:

$$Q + S_0\sigma = (S_0 k)\sigma , \text{ или } Q = S_0\sigma(k-1) .$$

Коэффициент поверхностного натяжения (данные справочника) изменяется с температурой линейно. Эту зависимость можно описать формулой

$$\sigma_T = \sigma_{T_0} \frac{T_{\text{крит}} - T}{T_{\text{крит}} - T_0}.$$

Здесь σ_{T_0} – коэффициент поверхностного натяжения при некоторой температуре T_0, а T – текущая температура. Если устроить тепловой двигатель, работающий по циклу Карно с нагревателем и холодильником, имеющими близкие температуры $T + \Delta T$ и T, в котором в качестве рабочего тела будет выступать пленка поверхности жидкости, то КПД такого двигателя будет равен $\Delta t/T$ и можно написать такое соотношение:

$$S_0 \Delta\sigma = Q \frac{\Delta t}{T},$$

или

$$S_0 \sigma_{T_0} \frac{\Delta t}{T_{\text{крит}} - T_0} = S_0 \sigma_{T_0} \frac{T_{\text{крит}} - T}{T_{\text{крит}} - T_0} (k-1) \frac{\Delta t}{T}.$$

Сократив на одинаковые множители, получаем

$$1 = \frac{T_{\text{крит}} - T}{T}(k-1), \text{ или } k - 1 = \frac{T}{T_{\text{крит}} - T}.$$

Подставим полученное выражение в формулу для Q:

$$Q = S_0 \sigma_T \frac{T}{T_{\text{крит}} - T}.$$

Если добавить к этой энергии работу внешних сил, то получится вклад во внутреннюю энергию жидкости при температуре T ее поверхности величиной S_0 (плоская поверхность с заданным периметром):

$$\Delta U = Q + A = S_0 \sigma_T \frac{T_{\text{крит}}}{T_{\text{крит}} - T}.$$

Ответ на поставленный вопрос получен.

Как видно из формулы для ΔU, в знаменателе стоит разность температур, которая при приближении T к $T_{\text{крит}}$ стремится к нулю. Но и сам коэффициент σ_T тоже стремится к нулю. Подставим в формулу значение σ_T, выраженное через значение при некоторой температуре T_0:

$$\Delta U = Q + A = S_0 \sigma_{T_0} \frac{T_{\text{крит}}}{T_{\text{крит}} - T_0}.$$

Получилась удивительная вещь: добавок внутренней энергии, связанный с наличием свободной поверхности, не зависит от температуры!

Имеется отдаленная аналогия с известной задачей о запасе энергии теплового движения воздуха в комнате при разных температурах воздуха, но при фиксированном давлении. И там тоже запас энергии не зависит от температуры, а определяется только давлением воздуха и объемом комнаты.

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

Что не так с перестановкой слагаемых?

К.КОХАСЬ

— Здравствуйте, уважаемые телезрители! Незаметно прошла неделя, и вы смотрите очередной потрясающий выпуск научно-популярной телепередачи «Что не так?» Меня зовут Горгулий, в нашей передаче мы не боимся прямо и честно рассказывать о самых замысловатых сюжетах. Задавайте нам свои вопросы прямо на сайте телепередачи. Тема сегодняшнего выпуска, как обычно, предложена телезрителями.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190603

Наш телезритель Пинот Хукк спрашивает: что не так с суммой, если мы переставляем слагаемые? Ответить на этот вопрос нам поможет наш постоянный эксперт по вопросам адекватности дятел Спятел.

– Привет, друзья! Вот и опять мы встретились по разные стороны телеэкрана!

– Скажите, пожалуйста, маэстро, откуда вообще у Пинота Хукка могло появиться беспокойство о сумме, в которой мы меняем порядок слагаемых? Неужели наш телезритель не знает элементарных фактов школьной программы?

– Видите ли, жизнь присутствует и за рамками школьной программы, – объяснил дятел Спятел. – Многочисленные примеры говорят нам, что порядок при суммировании важен. Вот, допустим, этот ваш Пинот Хукк пришел в магазин…

– Прошу прощения, не хотите ли вы сказать, что при покупке мороженого и шоколадки мы заплатим не столько же, сколько при покупке шоколадки и мороженого?

– Вы спортивный и энергичный, за словом в карман не лезете, да и вообще постоянно перебиваете и ведете себя нагло, к тому же речь идет о совсем небольшой покупке, поэтому, думаю, что если покупать будете вы, в обоих случаях цена покупки будет одна и та же. Но представьте, что вы пришли в ювелирный магазин и хотите купить… ну скажем, коробочку для перстня. Коробочка стоит всего 100 рублей, однако в последний момент вы говорите: «так и быть, давайте я куплю еще и перстень за 100 000». Таким образом, всего за 100 тысяч 100 рублей вы становитесь счастливым обладателем перстня в коробочке. Если же вы станете покупать эти предметы в другом порядке – сперва выберете перстень, а потом согласитесь «да-да, упакуйте, пожалуйста», то цена покупки может оказаться больше, например 100 тысяч 500 рублей!

– Я думаю, такие аномалии случаются нечасто.

– Не скажите, очень даже часто. Вот вам еще пример: на рынке продаются яблоки и апельсины; те и другие по 100 рублей за килограмм. Вы берете одно яблоко (приблизительно 10 рублей за 100 граммов) и одну тонну апельсинов (100 тысяч рублей). Итого 100 010 рублей. Если же вы берете тонну апельсинов, да еще просите добавить туда одно яблоко, «они ведь по одной цене», то получите то же самое, скорее всего, «всего лишь» за 100 000 рублей.

– Я понял вас, по-видимому, мы имеем здесь дело с коммерческим сложением, которое имеет свои нюансы и не всегда подчиняется математическим законам. Но может ли сумма измениться, если речь идет о чистой математике?

– Вы, конечно, слышали о вакуумных квантовых флуктуациях? – неожиданно спросил дятел Спятел.

– Да, – без запинки ответил Горгулий, – сейчас это очень модная тема, все о них слышали. Но специально для нашего телезрителя Пинота Хукка стоит пояснить.

– Вот, есть у вас пустое пространство, полнейший вакуум. Короче, такой нольпреноль. Неожиданно буквально из ниоткуда появляется, скажем, электрон в паре с позитроном. А через мгновение они тихомирно аннигилируют, вместо того чтобы разлететься в разные стороны.

– Да-да, удивительно и очень интересно, – согласился Горгулий, смачно зевнув. – Ненавижу физику. К чему же вы клоните?

– Просто зарисовочка из жизни. Она настраивает мысли на нужный лад. Вот что вы со своим телезрителем Пинотом Хукком можете сказать о сумме

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)+ \\ +\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)+\ldots?$$

– Хм... Ну... Да... Типичные вакуумные флуктуации. Она равна нулю!

– Не могу не согласиться. Но, кстати, если включить очень сильное магнитное поле, эти наши электроны-позитроны как раз-таки и разлетятся в разные стороны! Впрочем, это слишком художественно, к делу отношения не имеет. Давайте разберемся со слагаемыми в сумме. Самое крупное по модулю слагаемое тут одно: единица. Следующее по величине слагаемое $1/2$. Оно встречается три раза: два раза со знаком минус и один раз со знаком плюс. Итого $-1/2$. Следующее по величине слагаемое $1/4$ тоже встречается три раза: два раза со знаком минус и один раз со знаком плюс. Итого $-1/4$. То же самое можно сказать и про все остальные слагаемые. Получается, что наша сумма равна

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\ldots$$

– Да ведь это все тот же 0! Только теперь это записано не самым очевидным способом. Получается, что вы переставили слагаемые и даже кое-что сократили, а сумма не изменилась. Значит, все так?

– Не торопитесь. Рассмотрим еще один пример «флуктуаций»:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)+ \\ +\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{10}\right)+\ldots$$

Не правда ли, эта сумма тоже равна нулю. Упростим ее в стиле предыдущего рассуждения. Каждое слагаемое с четным знаменателем $2k$ встречается в сумме три раза: два раза со знаком минус в скобке $\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k}\right)$ и один раз со знаком плюс в скобке $\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{4k}-\frac{1}{4k}\right)$. А каждое слагаемое с нечетным знаменателем $2k+1$ встречается один раз со знаком плюс в скобке $\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{4k+2}-\frac{1}{4k+2}\right)$. Поэтому сумма равна

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$$

– Осмелюсь предположить, что это тоже ноль, только записанный еще менее очевидным способом.

– Ну что вы, какой же это ноль! Сумма, которую я написал, положительна, это совершенно очевидно:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots$$

А вы, я вижу, плохо отличаете положительные числа от нулевых. Кажется, я зря предположил, что стоимость мороженого и шоколадки у вас будет всегда одна и та же! Да вы, наверно, и есть тот самый Пинот Хукк, который задал этот дурацкий вопрос! Признавайтесь!

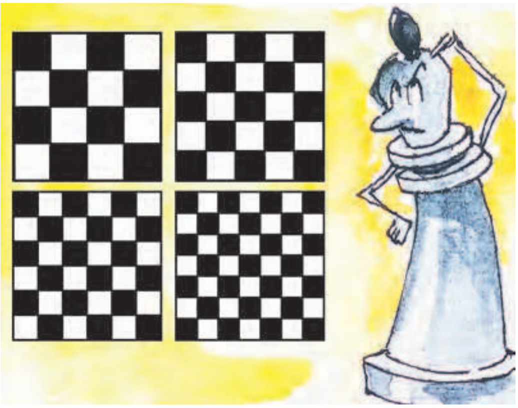
– Нууу, ээээ... В последнее время телезрители проявляют мало активности на сайте нашей телепередачи... Они задают скучные и малоинтересные вопросы...

– Дорогие друзья, я дятел Спятел, эксперт великолепной инновационной программы «Что не так?» по вопросам адекватности. Сегодня мы обсуждали интереснейший вопрос о возможном неадекватном поведении суммы при перемене мест слагаемых. Вместо этого мы стали свидетелями неадекватного поведения нашего ведущего! Давайте поаплодируем ему за прекрасно поставленный вопрос. Прояснилось ли что-нибудь в результате нашей дискуссии? Думаю, не очень. Ну да и ладно. Берегите себя, сохраняйте ясность ума и трезвость мысли! Увидимся на следующей неделе!

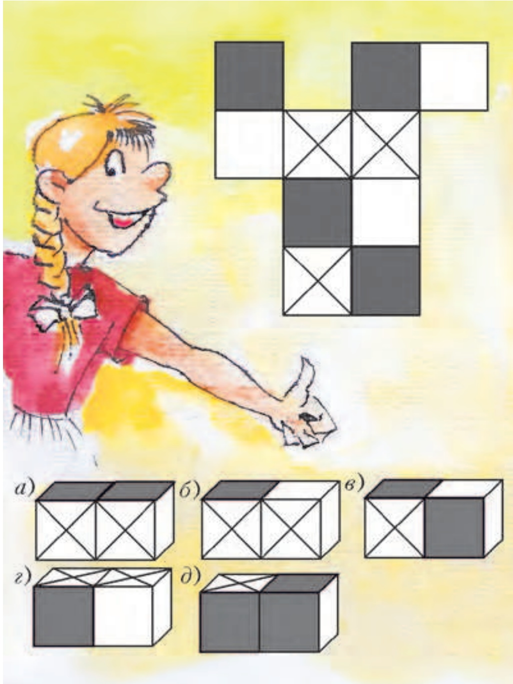
Задачи

1. В парке аттракционов колесо обозрения работает по субботам, воскресеньям и вторникам. В летние каникулы Маше разрешили ходить в парк 9 дней подряд. В какой день недели ей нужно пойти в парк первый раз, если она хочет кататься на колесе обозрения как можно больше?

2. Одинаковые квадраты разделены на маленькие квадратики, которые покрашены в шахматном порядке. На каком из них закрашенная площадь самая большая?



3. Из развертки, изображенной на рисунке вверху, Саша склеила коробку $1\times1\times2$ и рассматривает ее с разных сторон. Какой из вариантов *а* – *д* она не сможет увидеть?



4. Лист 4×8 сложили пополам, потом еще раз пополам и т.д. – в итоге получили квадрат 1×1. Потом лист развернули обратно, и некоторые отрезки оказались «выгнуты» вверх, а другие – «выгнуты» вниз. Какой могла оказаться сумма длин отрезков, выгнутых вверх? (Требуется найти все варианты и доказать, что других нет.)

Эти задачи предлагались на Международном математическом конкурсе-игре «Кенгуру» в 2019 году.

Иллюстрации Д.Гришуковой

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2562 – М2564, М2565а предлагались на заключительном этапе XLV Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи Ф2569–Ф2572 предлагались на Интернет-олимпиаде СУНЦ в 2018/19 учебном году. Автор задач – С.Варламов.

Задачи М2562–М2565, Ф2569–Ф2572

М2562. Каждой точке A плоскости сопоставлено вещественное число $f(A)$. Известно, что если M – точка пересечения медиан треугольника ABC, то $f(M) = f(A)+f(B)+f(C)$. Докажите, что $f(A)=0$ для всех точек A.

А.Голованов

М2563. Паша и Вова играют в следующую игру, делая ходы по очереди. Начинает Паша. Изначально перед мальчиками лежит большой кусок пластилина. За один ход Паша может разрезать любой из имеющихся кусков пластилина на три части. Вова своим ходом выбирает любые два куска и слепляет их вместе. Паша побеждает, если в некоторый момент среди имеющихся кусков пластилина окажется 100 кусков одинаковой массы. Может ли Вова помешать Паше победить?

Р.Ефремов, Д.Белов

М2564. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AC < BC$ (рис. 1). Окружность проходит через точки A и B и пересекает отрезки CA и CB повторно в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и A_1B_1C пересекаются повторно в точке P. Отрезки AB_1 и BA_1 пересекаются в точке S. Точки Q и R симметричны S относительно прямых CA и CB. Докажите, что точки P, Q, R и C лежат на одной окружности.

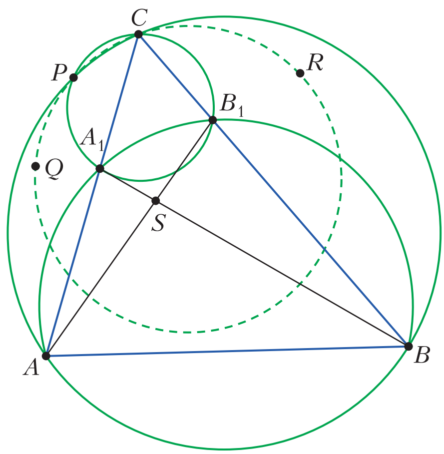


Рис. 1

Д.Прокопенко

М2565*. а) Даны n монет попарно различных масс и n чашечных весов, $n > 2$. При каждом взвешивании разрешается выбрать какие-то одни весы, положить на их чаши по одной монете, посмотреть на показания весов и затем снять монеты обратно. Какие-то одни из весов (неизвестно, какие) испорчены и могут выдавать случайным образом как правильный, так и неправильный результат. За какое наименьшее количество взвешиваний можно заведомо найти самую тяжелую монету?

б) Решите ту же задачу, если на чаши весов разрешается класть сколько угодно монет.

М.Дидин

Ф2569. На плоской вертикальной стене висят часы, у которых секундная стрелка движется плавно (без скачков) в вертикальной плоскости. Длина стрелки $R = 10$ см, ось вращения стрелок часов горизонтальна и находится на высоте $h = 2$ м над полом. На кончике секундной стрелки сидит муха и относительно стрелки не движется, а по горизонтальному полу вдоль стены с часами на расстоянии $L = 10$ см от нее бежит таракан с постоянной скоростью $v = 10$ см/с. В некоторый момент таракан находится ближе всего к часам. Какой по величине в этот момент может быть скорость таракана в системе отсчета мухи, где она и секундная стрелка часов покоятся, а весь мир вращается вокруг оси часов? Какой по величине в этот момент может быть скорость мухи в системе отсчета таракана, где его туловище покоится, ножки шевелятся и мимо него весь мир движется?

Ф2570. Между двумя домами с плоскими крышами, которые располагаются на одной высоте над землей, расстояние 3 метра. Вася принес на одну из крыш две легкие и прочные доски одинаковой ширины и толщины, каждая из которых имеет длину 2 метра. Связав веревками эти доски так, как показано на рисунке 2, Вася

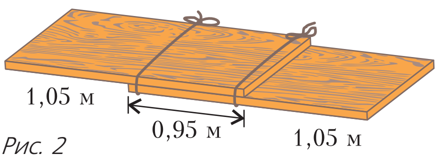


Рис. 2

соединил крыши домов мостиком. Доски своими свободными концами опираются о края крыш, «заходя» на каждую крышу на 2,5 см. А каждый из привязанных к другой доске концов охвачен веревкой, образующей «одинарное» кольцо. Масса Васи 60 кг. При какой минимальной прочности веревок на разрыв Вася может, не боясь упасть и не торопясь, переходить с одной крыши на другую?

Ф2571. Сплошной стальной шарик радиусом $R = 5$ см привязан тонкой прочной и нерастяжимой нитью к дну сосуда. В сосуд налили столько ртути, что шарик не касается дна, а нить натянута с силой $F = 13{,}6$ Н. В этот же сосуд дополнительно наливают столько воды, что весь шарик оказывается ниже ее верхнего уровня. Какой теперь стала сила натяжения нити? Плотность ртути $\rho_{рт} = 13{,}6\ г/см^3$, плотность стали $\rho_{ст} = 7{,}8\ г/см^3$, плотность воды $\rho_в = 1{,}0\ г/см^3$. Считайте, что $g = 10\ м/с^2$.

Ф2572. Водопроводный кран сломался, поэтому из него в раковину постоянно капает горячая вода с температурой $+60\ °C$. Вода скапливается в подставленной тарелке, а ее излишек стекает в сливное отверстие. Температура воды в тарелке через сутки после поломки установилась равной $+30\ °C$. Какой станет температура воды в тарелке через сутки после починки крана сантехником Джамшутом, если в результате «починки» частота падения капель увеличилась в 4 раза? Комнатная температура $+20\ °C$. Мощность тепловых потерь пропорциональна разнице температур.

Решения задач М2550–М2552, Ф2557–Ф2560

М2550. *Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство*

$$\frac{a+b}{\sqrt{b+c}} + \frac{b+c}{\sqrt{c+a}} + \frac{c+a}{\sqrt{a+b}} \ge \sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c}.$$

Для решения будем использовать вспомогательные неравенства для положительных чисел:

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \ge x + y + z, \qquad (1)$$

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \ge \sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c}. \qquad (2)$$

Для доказательства неравенства (1) можно, например, взять неравенство $\frac{x^2}{y} \geq 2x - y$ (которое эквивалентно неравенствам $x^2 \geq 2xy - y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq$ $\geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$) и сложить с аналогичными неравенствами $\frac{y^2}{z} \geq 2y - z$ и $\frac{z^2}{x} \geq$ $\geq 2z - x$.

Чтобы доказать неравенство (2), можно неравенство $\sqrt{a+b} \geq \sqrt{a/2} + \sqrt{b/2}$ (которое эквивалентно неравенствам $a + b \geq a/2 +$ $+ \sqrt{ab} + b/2 \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} -\right.$ $\left. - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$) сложить с аналогичными неравенствами $\sqrt{b+c} \geq \sqrt{b/2} + \sqrt{c/2}$ и $\sqrt{c+a} \geq \sqrt{c/2} + \sqrt{a/2}$.

Теперь данное в условии неравенство можно доказать в два хода. Вначале, применив неравенство (1) для чисел $x = \sqrt{a+b}$, $y = \sqrt{b+c}$, $z = \sqrt{c+a}$, получим

$$\frac{a+b}{\sqrt{b+c}} + \frac{b+c}{\sqrt{c+a}} + \frac{c+a}{\sqrt{a+b}} \geq$$
$$\geq \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a},$$

после чего остается воспользоваться неравенством (2).

Б.Кайрат, А.Храбров

М2551. *На доске нарисован выпуклый n-угольник ($n \geq 4$). Каждую его вершину надо окрасить либо в черный, либо в белый цвет. Назовем диагональ разноцветной, если ее концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовем хорошей, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок.*

Ответ: $n^2 - n$.

Сразу же заметим, что раскраска всех вершин в один цвет хорошей не является; такие раскраски в дальнейшем не рассматриваются.

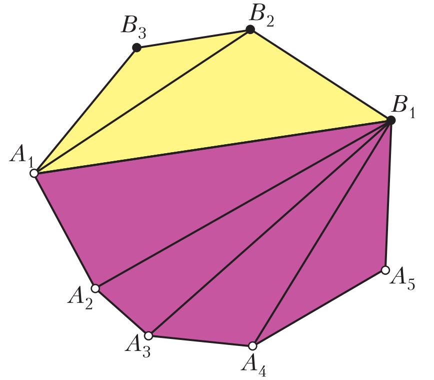
Назовем сторону многоугольника *разноцветной*, если ее концы окрашены в разные цвета, и *одноцветной* – в противном случае. Назовем раскраску вершин *упорядоченной*, если все черные вершины на границе многоугольника образуют один *блок* подряд идущих вершин, иначе говоря, у многоугольника есть ровно две разноцветные стороны (ясно, что менее двух разноцветных сторон быть не может). Установим следующее описание хороших раскрасок.

Лемма. *Раскраска вершин выпуклого n-угольника (при $n \geq 3$) является хорошей тогда и только тогда, когда она упорядочена.*

Доказать лемму можно разными способами, например используя индукцию. Мы приведем здесь доказательство, которое встретилось в работах нескольких школьников на региональном этапе Всероссийской олимпиады.

Доказательство. Предположим, что раскраска вершин выпуклого n-угольника является хорошей, и рассмотрим соответствующее разбиение многоугольника на треугольники разноцветными диагоналями. Как известно, в таком разбиении ровно $n - 2$ треугольника (это следует, например, из подсчета суммы углов n-угольника: с одной стороны, она равна $(n-2) \cdot 180°$, а с другой, она равна сумме углов всех треугольников разбиения). В каждом из этих треугольников можно выбрать сторону, соединяющую вершины разного цвета; такая сторона не может быть диагональю n-угольника, а значит, это одноцветная сторона n-угольника. Итак, для каждого из $n - 2$ треугольников нашлась одноцветная сторона n-угольника (для разных треугольников эти стороны, очевидно, разные), поэтому всего в нашем n-угольнике не менее $n - 2$ одноцветных и, следовательно, не более двух разноцветных сторон. Таким образом, раскраска вершин является упорядоченной.

Пусть теперь раскраска вершин выпуклого n-угольника является упорядоченной, последовательно обозначим вершины $A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_l$, где A_i – белые вершины, а B_j – черные (см. рисунок). Проведем все диагонали, ведущие из A_1 в черные вершины, и все диагонали, ведущие из B_1 в белые вершины. Очевидно,



получено требуемое разбиение разноцветными диагоналями.

Лемма доказана.

Ввиду леммы, осталось лишь посчитать число упорядоченных раскрасок n-угольника. Для каждого возможного количества k черных вершин (k принимает значения от 1 до $n-1$) среди всех n вершин можно n способами выбрать расположение блока из k подряд идущих черных вершин, т.е. число способов равно $n(n-1)$.

С.Берлов, И.Богданов

М2552. *Последовательность (a_n) натуральных чисел задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{[\sqrt{n}]}$ при всех натуральных $n \ge 1$. Докажите, что для каждого натурального k в этой последовательности найдется член, делящийся на k.*

Среди чисел $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$ выберем число, которое дает наименьший остаток при делении на k. Пусть это число a_m, и пусть оно дает остаток r при делении на k. Если $r = 0$, то a_m – нужный нам член последовательности. Предположим теперь, что $0 < r < k$.

Поскольку $m \ge k$, имеем

$$m^2 + k \le m^2 + m < m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2,$$

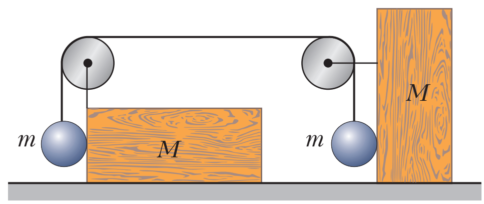
поэтому

$$\left[\sqrt{m^2+1}\right] = \left[\sqrt{m^2+2}\right] = \ldots = \left[\sqrt{m^2+k}\right] = m.$$

Отсюда $a_{m^2+1} = a_{m^2} + a_m$, $a_{m^2+2} = a_{m^2+1} + a_m$, …, $a_{m^2+k} = a_{m^2+k-1} + a_m$, т.е. $a_{m^2+t} = a_{m^2} + ta_m$ для $t = 1, 2, \ldots, k$. Пусть a_{m^2} дает остаток R при делении на k, тогда a_{m^2+t} дает при делении на k такой же остаток, как и число $R + tr$. В ряду чисел $R, R+r, R+2r, \ldots, R+kr$ найдем первое число, не меньшее k (такое число найдется, так как $R < k$, а $R + kr \ge R + k \ge k$). Пусть это число $R + sr$. Тогда $R + (s-1)r < k \le R + sr$, откуда $0 \le (R + sr) - k < r$, поэтому у числа $R + sr$, а значит, и у числа a_{m^2+s}, остаток при делении на k строго меньше r, что противоречит нашему выбору.

П.Кожевников

Ф2557. *На горизонтальной плоскости находятся два одинаковых однородных бруска массой M, один из них – «лежачий», а другой – «стоячий» (см. рисунок).*



На брусках закреплены невесомые блоки без трения в осях, через которые перекинута невесомая и нерастяжимая нить, соединяющая два одинаковых шара массой m. У нити имеются вертикальные и горизонтальный участки. Шары касаются брусков. Вначале эти бруски удерживаются внешними силами в неподвижном состоянии. Затем бруски отпустили, и они стали двигаться поступательно. С какими начальными ускорениями двигались бруски? Трения в системе нигде нет.

Судя по рисунку, бруски будут сближаться, так как между ними имеется натянутая нить. Шар, прикасающийся к «стоячему» бруску, останется в соприкосновении с ним, а вот второй шар (слева на рисунке) сразу после того, как внешние силы пропали, перестанет касаться «лежачего» бруска. Оба шара начнут опускаться вниз. Вертикальные составляющие их ускорений в начальный момент будут одинаковыми. Обозначим небольшое смещение шаров вниз через x, тогда в сумме горизонтальные встречные смещения брусков (будем их считать положительными) $x_{\text{ст}} + x_{\text{леж}}$ дадут величину $2x$. Это расстояние поделится между смещениями «лежачего» и «стоячего» брусков в пропорции

$$(M+m)x_{\text{ст}} = Mx_{\text{леж}} .$$

Отсюда находим

$$x_{\text{ст}} = x\frac{M}{M+m/2},\ x_{\text{леж}} = x\frac{M+m}{M+m/2} .$$

Поскольку трения нет, то механическая энергия системы тел сохраняется:

$$\frac{(x')^2}{2}\left[2m + M\left(\frac{M+m}{M+m/2}\right)^2 + (M+m)\left(\frac{M}{M+m/2}\right)^2\right] - 2mgx = 0 .$$

Обозначим выражение в квадратных скобках в полученном уравнении через A. Упрощая это выражение, получим

$$A = \frac{m^2 + 4mM + 2M^2}{M+m/2}$$

и перепишем уравнение в более удобном виде:

$$(x')^2 = \frac{4mg}{A}x .$$

Из кинематики известно, что такая связь координаты x и скорости x' соответствует движению с ускорением, равным $\frac{2mg}{A}$. Отсюда получаются искомые ускорения брусков сразу после их освобождения: ускорение «лежачего» бруска равно

$$x''_{\text{леж}} = \frac{2mg}{A}\frac{M+m}{M+m/2} = \frac{2gm(m+M)}{m^2+4mM+2M^2}$$

и направлено вправо, ускорение «стоячего» бруска равно

$$x''_{\text{ст}} = \frac{2mg}{A}\frac{M}{M+m/2} = \frac{2gmM}{m^2+4mM+2M^2}$$

и направлено влево.

М.Ромашка

Ф2558. *Шаровая льдинка радиусом R_0, имеющая температуру $0\ ^\circ\text{C}$, в условиях невесомости начинает таять (плавиться) при постоянной «невысокой» температуре окружающей среды T_0 ($T_0 \sim 2-5\ ^\circ\text{C}$). Пренебрегая испарением, определите время таяния льдинки. Во сколько раз возрастает время таяния льдинки при увеличении ее радиуса в два раза? Удельная теплота плавления льда λ, коэффициент теплопроводности воды η. Считайте, что при плавлении льдинка сохраняет форму шара и симметрично окружена водой, образовавшейся при ее таянии, поскольку вода хорошо смачивает лед. Температура на внешней поверхности воды, которая представляет собой сферу, всегда равна температуре окружающей среды T_0.*

Сначала определим, как время плавления t зависит от существенных параметров системы, приведенных в условии задачи. «Оценочное» уравнение для времени можно получить, считая, что теплота для плавления льда объемом $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ и вынужденного при этом нагрева образовавшейся воды до температуры порядка T_0 поступает через поверхность площадью $S \sim 4\pi R^2$ через слой воды толщиной $h \sim R$ при разнице температур T_0:

$$\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\cdot(\lambda + cT_0) \sim \eta\cdot 4\pi R^2\cdot\frac{T_0}{R}\cdot t .$$

Отсюда получаем

$$t = A\frac{\rho\lambda}{\eta T_0}R^2\left(1+\frac{cT_0}{\lambda}\right),$$

где c – теплоемкость воды, A – некоторая численная константа, которую можно определить только при «точном» решении задачи. Из полученного выражения следует, что время плавления пропорционально квадрату начального размера льдинки и при увеличении диаметра льдинки в 2 раза время плавления увеличится в 4 раза. При малом значении T_0 вторым слагаемым в скобках можно пренебречь. (При $T_0 = 3\ ^\circ\text{C}$ второе слагаемое равно $cT_0/\lambda \approx 1/30$, что действительно много меньше 1.)

Теперь рассмотрим точное решение задачи. Можно считать, что при невысокой температуре окружающей среды процесс таяния льдинки будет очень медленным и что распределение температуры в расплавленной оболочке (воде) будет стационарным. При этом поток тепла для таяния льдинки определяется градиентом температуры на границе вода–лед и величиной поверхности этой границы

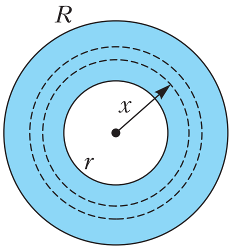


Рис. 1

(рис.1). Запишем это условие (в соответствии с законом Фурье):

$$\eta \cdot 4\pi x^2 \frac{dT}{dx} = C .$$

Интегрируем и находим

$$T = -\frac{C}{4\pi\eta} \cdot \frac{1}{x} + C_1 .$$

Константы определяем из граничных условий

$$T_0 = -\frac{C}{4\pi\eta} \cdot \frac{1}{R} + C_1 ,$$

$$0 = -\frac{C}{4\pi\eta} \cdot \frac{1}{r} + C_1$$

и получаем

$$C_1 = \frac{C}{4\pi\eta} \cdot \frac{1}{r} , \quad C = 4\pi\eta T_0 \frac{Rr}{R-r} .$$

В итоге распределение температуры в водной оболочке определяется формулой

$$T = T_0 \frac{Rr}{R-r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right).$$

Сложность дальнейшего точного расчета связана с изменением объема при таянии льда. Примем плотность льда равной $0{,}9 \text{ г/см}^3$. Легко показать, что внешний радиус жидкой сферы определяется такой формулой (r – радиус оставшейся льдинки):

$$R(r) = R_0 \cdot 0{,}9^{1/3} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{9}\left(\frac{r}{R_0}\right)^3} \approx$$

$$\approx 0{,}965 R_0 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{9}\left(\frac{r}{R_0}\right)^3} .$$

График этой «нехорошей» (но очень «слабенькой») функции приведен на рисунке 2. Очевидно, что для упрощения расче-

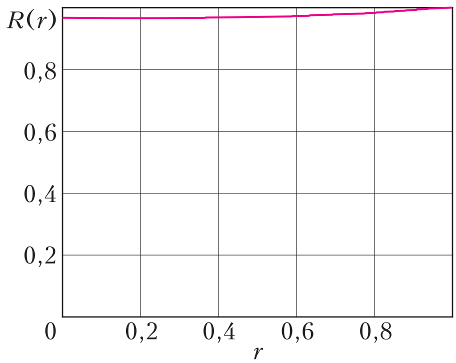


Рис. 2

тов внешний радиус можно считать константой со значением $R \approx \frac{1 + 0{,}965}{2} R_0 \approx$ $\approx 0{,}983 R_0$ (в соответствии с усреднением линейной аппроксимации).

Теперь находим градиент температуры у поверхности льда, который и определяет тепловой поток при таянии льдинки:

$$\frac{dT}{dx} = T_0 \frac{Rr}{R-r} \frac{1}{x^2} , \text{ или } \frac{dT}{dr} = T_0 \frac{R}{(R-r)r} .$$

Уравнение плавления запишем в виде

$$\rho \cdot 4\pi r^2 \cdot (-dr) \cdot \lambda = \eta \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{dT}{dr} \cdot dt =$$

$$= \eta \cdot 4\pi r^2 T_0 \frac{R}{(R-r)r} dt .$$

После преобразования проинтегрируем:

$$t = -\frac{\rho\lambda}{\eta T_0 R} \int_R^0 (R-r) r \cdot dr = \frac{\rho\lambda}{6\eta T_0} R^2$$

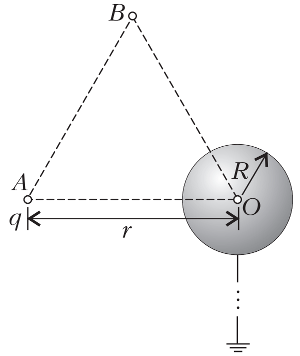
и учтем изменение объема при плавлении:

$$t = \frac{\rho\lambda}{6\eta T_0} (0{,}983 R_0)^2 \approx 0{,}965 \frac{\rho\lambda}{6\eta T_0} R_0^2 .$$

Численный расчет показывает, что шарик радиусом в 1 см при внешней температуре $2{,}25\ ^\circ\text{C}$ расплавится за 1 час.

А.Власов

Ф2559. *В точке A, расположенной на расстоянии r от центра O незаряженной проводящей сферы радиусом R, находится точечный заряд q (см. рисунок). Сферу заземляют длинным тонким проводником. На сколько после заземления изменится потенциал φ точки B, являющейся вершиной равностороннего треугольника ABO? Каким будет изменение век-*



тора напряженности электрического поля в этой же точке?

Решение аналогичной задачи см. в статье С.Крюкова «Принцип суперпозиции в электростатике» в предыдущем номере «Кванта».

Ф2560. *Имеется бесконечная сетка, сделанная из проволоки постоянного сечения, показанная на рисунке 1. Длина отрезка*

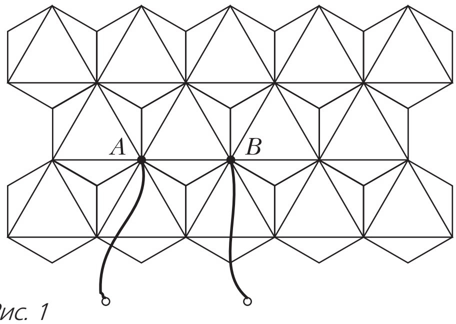


Рис. 1

AB равна a. Сопротивление единицы длины проводника равно ρ. Найдите сопротивление R_{AB} между точками A и B.

Преобразуем все звезды искомой сетки в треугольники, как показано на рисунке 2.

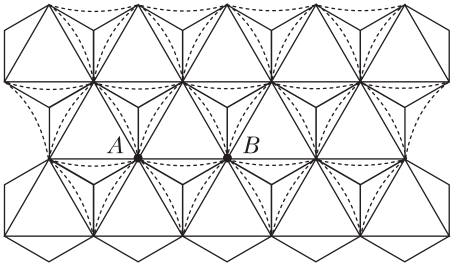


Рис. 2

У каждого получившегося треугольника сопротивление «стороны» равно

$$R_1 = 3\cdot\rho\cdot\frac{a}{2}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\rho a\,.$$

Если теперь все параллельные соединения заменить эквивалентными, то получится бесконечная треугольная сетка (рис.3) с

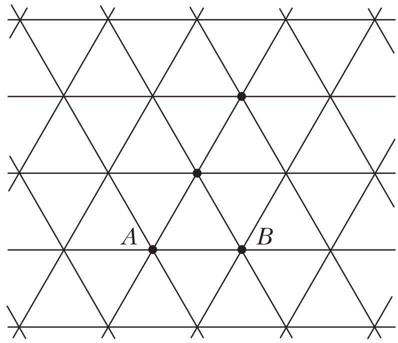


Рис. 3

сопротивлением каждого ребра

$$R_2 = \frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\rho a\right)\cdot\rho a}{\frac{3\sqrt{3}}{4}\rho a+\rho a} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+4}\rho a\,.$$

Если бы ток был подведен только к одному узлу A, то дальше он симметрично распределялся бы по остальным участкам и уходил в бесконечность. При этом сила тока в первых шести отрезках решетки была бы равна $\frac{1}{6}I$. И наоборот, если бы ток стекался из бесконечности к узлу B, то через каждый из шести отрезков решетки, подходящих к узлу B, шел бы ток в шесть раз меньший, чем общий ток в проводе, который соединяет узел B с источником тока. Подключение же источника к узлам A и B является суперпозицией двух рассмотренных случаев. Тогда ток, текущий по отрезку AB, равен $\frac{1}{3}I$. Для искомого сопротивления окончательно получаем

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{\frac{1}{3}I\cdot\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+4}\rho a}{I} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+4}\rho a.$$

А.Бычков

От пузырька до черных дыр

А.СТАСЕНКО

У каждого человека свои звезды. Одним они указывают путь. Для других это просто маленькие огоньки. Для ученых – они как задача, которую надо решить.

Антуан де Сент-Экзюпери.
Маленький принц

ВСЕ, ЧТО КОЛЕБЛЕТСЯ, ЗАЯВЛЯЕТ О СЕБЕ волнами, распространяющимися в окружающем пространстве. Казалось бы, что может быть различнее, чем газовый пузырек в жидкости и черная дыра чудовищной плотности в космической «пустоте»...

Начнем с пузырька в жидкости. Если его поверхность колеблется сферически-симметрично, то фронты волн, распространяющихся в окружающей жидкости, тоже будут сферами (рис.1,*а*). А векторы плотности потока энергии на расстояниях, много больших размера пузырька, будут направлены по радиусам. Конечно, если считать жидкость абсолютно несжимаемой, то такие колебания пузырька возможны, только если жидкость обладает свободной поверхностью или если есть второй пузырек, который будет сжиматься при расширении первого (рис.1,*б*). Такая структура называется *ди*полем. Соответственно, излучение одного пузырька можно назвать *моно*польным.

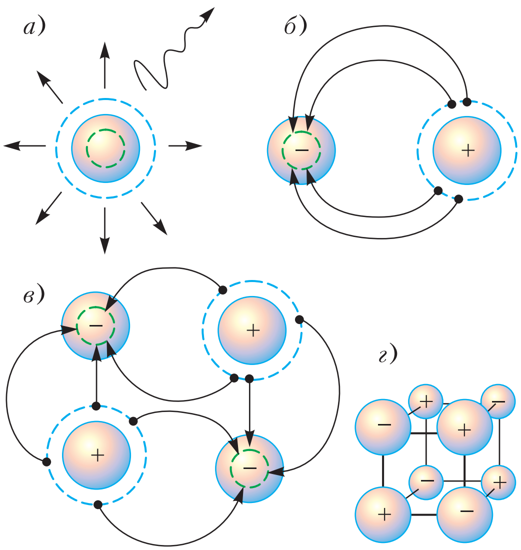


Рис. 1. Различные комбинации колеблющихся пузырьков в жидкости: а) монополь, б) диполь, в) квадруполь, г) октуполь

Для круговой частоты ω малых колебаний отдельного пузырька из соображений размерностей можно получить следующее выражение:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \sim \frac{1}{a_0}\sqrt{\frac{p_0}{\rho}}\,,$$

где T – период колебаний, a_0 – радиус равновесного невозмущенного пузырька, p_0 – давление в жидкости, ρ – ее плотность. Точное выражение (формула Миннарта) содержит безразмерный множитель $\sqrt{3\kappa} \approx 2$, где $\kappa = \frac{c_p}{c_V}$ – отношение теплоемкостей при постоянной давлении и при постоянном объеме газа в пузырьке. Полагая $a_0 = 1$ мм, $p_0 = 10^5$ Па, $\rho = 10^3$ кг/м^3, $\kappa = 1{,}4$, получим

$$\omega = 2\cdot 10^4 \text{ рад/с}\,,\ \ T = 3\cdot 10^{-4} \text{ с}\,.$$

А что если рядом с этим диполем расположить еще один (рис.1,*в*)? Правильно, получится *квадру*поль (на дискотеках часто используют квадроколонки). Отметим, что этот термин встретится позже, при рассмотрении гравитационного излучения звезд. Далее, нетрудно догадаться поместить рядом с этим квадруполем еще один (рис.1,*г*). Понятно, что получится *окту*поль (восьмиполюсник). На рисунках знаком «+» обозначены пузырьки в момент их расширения, знаком «–» – в момент сжатия, а стрелками показаны линии тока окружающей жидкости. Качественно такая же картина получится для силовых линий электростатического поля, если пузырьки заменить электрически заряженными шариками.

Но обратимся к звездам. Недавно свершилось чудо, которого физики ожидали целое столетие, – на Земле были зарегистрированы гравитационные волны, идущие из дальнего космоса! Дело в том, что электромагнитное излучение звезд – свет – легко

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190604

наблюдаемо и многократно воспето поэтами, а радио-, ИК, УФ, рентгеновское и гамма-излучения уверенно регистрируются приборами. Однако общая теория относительности (ОТО) предсказывает и гравитационные волны, которые должны возникать при колебаниях форм массивных звезд. Принципиально важно и практически заманчиво научиться регистрировать эти волны. Ведь в принципе, например, любой студент, ускоренно перемещаясь из лекционного зала в буфет, изменяет распределение масс во Вселенной.

Человечество уже почти сто лет изучает возможность зарегистрировать на Земле гравитационные волны, идущие к нам из мирового пространства. Детекторы, использованные Дж.Вебером (шестидесятые годы прошлого века) могли «почувствовать» деформацию принимающего устройства с точностью до 10^{-16} м – в десять раз меньше радиуса протона! В опытах В.Б.Брагинского (конец прошлого – начало нынешнего века) порог чувствительности плотности потока энергии достигал 10^{-9} Вт/м^2.

А сравнительно недавно следящая система зарегистрировала гравитационные волны от двойной черной дыры общей массой почти в сотню масс нашего Солнца, удаленной от нас на 400 мегапарсеков (1 парсек = $3 \cdot 10^{16}$ м). Конечно, обе ее части вращались вокруг общего центра масс (например, как Земля и Луна) с громадной и все возрастающей скоростью порядка скорости света («порядка» ни в коем случае не означает «равной»). А поскольку расстояние между ними изменялось, возникала сильная приливная деформация этих звезд и окружающего пространства, что и породило гравитационные волны (рис.2). И если колебания капли воды характеризуются не только набором частот, но и форм – чего уж тут ждать от звезд! Среди спектра этих колебаний важную роль играют квадрупольные моды.

В результате слияния образовалась единая черная дыра массой в $62M_\odot$ (где $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца), на излучение гравитационных волн ушла энергия $3M_\odot c^2$ (где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света), а максимальное значение гравитационной «светимости» достигло $3{,}6 \cdot 10^{49}$ Вт, что эквивалентно мощности в $200M_\odot c^2$ джоулей в секунду. Конечно, до Земли дошел лишь очень слабый «звук». Один из исследователей сравнил трудности выделения нужных сигналов с попыткой расслышать шепот приятеля на другом конце шумного кафе. Пожалуй, и это сравнение недостаточно яркое – «услышать» гравитационный сигнал при помощи одного детектора еще труднее.

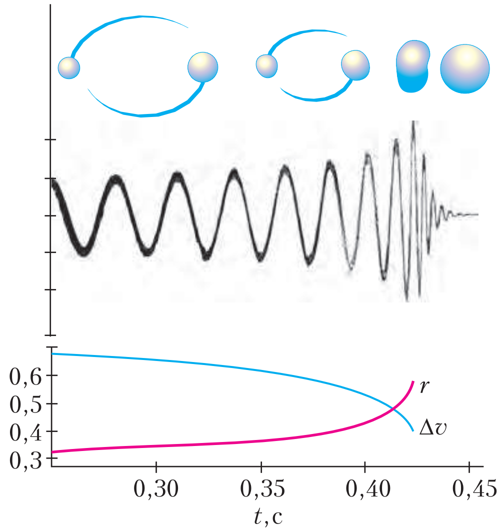


Рис. 2. Слияние пары черных дыр. Верхний ряд – последовательные фазы процесса. Средний – соответствующие колебания напряженности гравитационной волны (условные единицы), полученные в результате численных исследований на основе ОТО. Внизу – изменение со временем расстояния r между звездами и их относительной скорости Δv (отнесенной к скорости света)

Итак, в двух точках США на расстоянии приблизительно 3000 км друг от друга были установлены два детектора. Гравитационная волна должна была пройти этот путь приблизительно за 10 микросекунд в предположении, что ее скорость равна скорости света. Основываясь на этом, из громадного множества шумов удалось выделить два похожих сигнала, сдвинутых во времени относительно друг друга на известную величину запаздывания (рис.3). Частота зарегистрированных колебаний лежала в пределах 35–250 Гц. При этом надежность эксперимента считается очень высокой: вероятность ложного срабатывания приборов оценивается как одно событие в 203 тысячи лет.

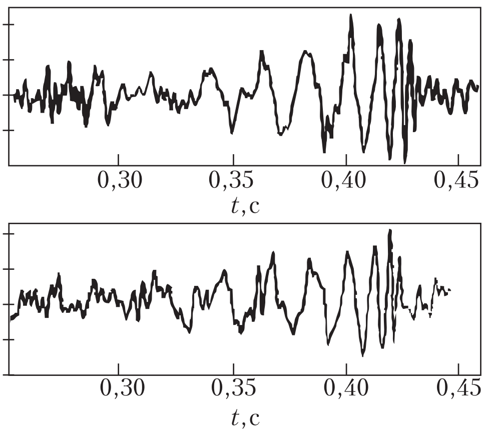


Рис. 3. Экспериментальные результаты: колебания напряженности гравитационной волны, зарегистрированные в двух точках со сдвигом по времени порядка 7 микросекунд

Но, может быть, не все помнят, что такое черная дыра? А это такая массивная и плотная звезда, с поверхности которой даже квант электромагнитного излучения не может выбраться на свободу. Радиус такой звезды можно оценить из следующих соображений. Энергия кванта равна $h\nu$, его масса $\frac{h\nu}{c^2}$. Следовательно, его потенциальная энергия тяготения на поверхности сферического тела радиусом R и массой M равна $U_R = -\frac{GM}{R}\frac{h\nu}{c^2}$. Чтобы выбраться из этой потенциальной ямы (рис.4), квант должен иметь начальную энергию не меньше $h\nu \sim U_R$, откуда $R \sim \frac{GM}{c^2}$. Точное значение

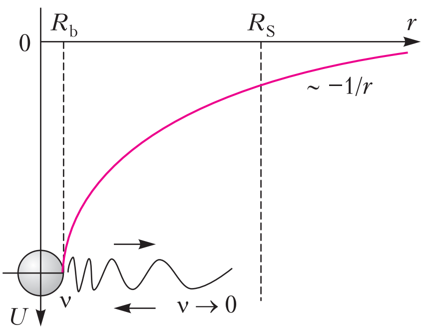


Рис. 4. Потенциал «спокойной» черной (black) дыры с радиусом $R_b < R_S$. Квант, радиально излученный с ее поверхности, теряет всю свою «кинетическую» энергию, не выходя за пределы горизонта событий, т.е. сферы радиусом R_S

вдвое больше и называется радиусом Шварцшильда R_S, а сфера такого радиуса называется горизонтом событий. Для рассматриваемого случая имеем

$$R_S = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 62 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{\left(3 \cdot 10^8\right)^2}\ \text{м} \approx 180\ \text{км}.$$

Радиусы пары исследуемых звезд – коль скоро они черные дыры – еще меньше, и, следовательно, их плотность должна быть чудовищно большой (например, нейтронные звезды при диаметре 10–20 км имеют плотность $3 \cdot 10^{17}$ кг/м^3).

«Взрослые очень любят цифры… если им сказать, что Маленький принц на самом деле существовал,… они только пожмут плечами… но если им сказать, что он прибыл с астероида B-612, – это их убедит». Поэтому сообщим, наконец, что описанное событие слияния двух черных дыр и излучения при этом гравитационных волн маркировано как GW150914 (GW – gravitational wave). (Более подробно см.: B.P.Abbott et. al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger // Physical Review Letters, PRL 116, 061102 (2016), 16 p.)

Вспомним, что еще в средние века одно из основных требований к эксперименту заключалось в его повторяемости. И что же – за два-три года за описанным событием было зарегистрировано еще несколько случаев срабатывания детекторов гравитационных волн. Во всех этих событиях активно участвовали и российские физики, за что многие из них недавно удостоены государственных наград.

Проведенные эксперименты в очередной раз подтвердили справедливость ОТО, разработанной сотню лет назад великим Альбертом Эйнштейном, в частности, фундаментального постулата об одинаковой скорости распространения гравитационных и электромагнитных волн. Как тут не возникнуть идее о Единой Теории Поля, которую Эйнштейн и пытался построить всю свою жизнь. А вслед за ним и многие другие. Так что, присоединяйтесь!

...начало судостроения восходит задолго до всякой письменности и всякой истории...

Алексей Крылов

Можно сравнить сопротивление тел между собой и находить те, которые приспособлены к продолжению своего движения в сопротивляющейся среде.

Исаак Ньютон

...всюду в угольных районах...паровые машины везут уголь! Сами по себе везут, без помощи четвероногих!

Евгений Тарле

...многие с незапамятных времен смотрели на ракету как на один из способов воздухоплавания.

Константин Циолковский

А так ли хорошо знакомы вам физика+техника?

Как можно было бы человеку заниматься строительством и обрабатывать различные материалы – а именно об этом шла речь в наших предыдущих физико-технических выпусках, – если бы не было возможности перемещать разнообразные грузы да и передвигаться самому? Вот и пришлось ему ломать голову над поиском приспособлений, позволяющих перевозить больше и быстрее, иными словами – решать ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ.

Многие столетия нас выручали колесные повозки, весла и паруса – с их помощью удавалось осваивать огромные пространства и даже открывать новые континенты. Но вот на смену «лошадиным силам» и попутным ветрам пришли новые машины, значительно более мощные и скорые. Активно «впитывая» достижения науки, транспортная техника буквально за два последних века кардинально изменила представления о земных масштабах и времени достижения любой точки нашей планеты.

Сегодня нас уже не удивить дронами и беспилотными автомобилями, судами на подводных крыльях и воздушной подушке, самолетами на солнечных батареях и туристскими полетами по околоземным орбитам. Что будет завтра? Попробуем представить себе наше транспортное будущее, правда, отталкиваясь пока только от хорошо известных средств передвижения.

Вопросы и задачи

1. Наши далекие предки пользовались на грунтовых дорогах арбами – повозками с большими колесами. В чем преимущество такого вида транспорта?

2. Как легче сдвинуть с места арбу – прилагая силу к ее корпусу или к верхней части обода колеса?

3. Велосипедист легко развивает силу тяги 100 Н. Сила трения не превышает 50 Н. Казалось бы, за несколько часов можно развить вторую космическую скорость, однако это невозможно. Почему?

4. Зачем на автомобильных шинах делают рельефный рисунок (протектор)? С какой целью он содержит и поперечные и продольные полосы?

5. При движении по песку или снегу рекомендуют давление воздуха в шинах автомобиля уменьшить. Для чего?

6. Каков смысл установки крыльев на гоночных автомобилях?

7. Чтобы сдвинуть с места тяжелый железнодорожный состав, машинист сначала дает задний ход. Почему? Если же резко тронуть вперед состав, то в какой части поезда может произойти разрыв сцепок?

8. Зачем парусным яхтам большой киль?

9. Почему у колесных кораблей движитель – колесо – не погружалось в воду целиком, в то время как у современных кораблей винт полностью погружен в воду?

10. Судно перешло из реки в море. Мощность двигателей не изменились. А осталась ли прежней скорость судна относительно воды?

11. Можно ли применять паруса и руль для управления полетом воздушного шара?

12. Вертолет, стоящий на горизонтальной поверхности земли, поднялся и завис на небольшой высоте. Когда вертолет действовал на землю с большей силой?

13. Изменяется ли при полете с включенным двигателем и расходуя топливо положение центра тяжести самолета в системе отсчета, связанной с его корпусом?

14. Почему при равномерном горизонтальном полете тяжело нагруженный самолет движется медленнее ненагруженного?

15. Отчего с повышением температуры воздуха мощность воздушных реактивных двигателей уменьшается?

16. Ракета летит с работающим двигателем, причем скорость ракеты больше скорости вылета реактивной струи из двигателя. Увеличивается ли при этом скорость ракеты?

Микроопыт

Наверняка при езде на велосипеде вы обращали внимание на используемые в нем простые механизмы – руль, педали, цепную передачу. В каких из них и в чем добиваются выигрыша?

Любопытно, что...

...изобретению колеса предшествовало длительное овладение вращательным движением – от верчения деревянной палочки для получения огня, использования гончарного круга и подъемных приспособлений до применения круглого бревна при перевозке тяжестей.

...уже мореплаватели Древнего Египта умели управлять силой ветра: паруса их судов постепенно приняли оптимальную по тем временам форму.

...Ньютону, занимавшемуся, в том числе, и аэродинамикой, удалось установить квадратичную зависимость силы сопротивления среды от скорости, так важную впоследствии для дозвуковой авиации. При бóльших скоростях эта зависимость становиться кубической, что было подмечено артиллеристами около ста лет назад, когда самолеты еще только начали обгонять птиц.

...появление локомотива – паровой машины на рельсах – и изобретение парохода в начале XIX века произвели форменную революцию в транспортной технике.

...при транспортировке огромного камня для пьедестала «Медного всадника» в Петербурге использовались подкладываемые под него чугунные шары – прообразы будущих шарикоподшипников, получивших распространение лишь в 80-х годах XIX века. Благодаря этому трение скольжения было заменено в десятки раз меньшим трением качения.

...Д.И.Менделеев, без пилота совершивший полет на воздушном шаре, утверждал, что покорение атмосферы будет осуществляться с помощью аэростатов, а не машин тяжелее воздуха. К.Э.Циолковский до начала занятий теорией ракетного движения разрабатывал принципы построения цельнометаллического дирижабля.

...инженеры Массачусетского технологического института создали двухместный летающий автомобиль. По земле он движется со сложенными крыльями, а в воздухе развивает скорость до 185 километров в час с полезной нагрузкой до 195 килограммов.

...менее года назад лодка-робот, управляемая автопилотом, пересекла Атлантический океан. Бортовую электронику питали установленные на палубе солнечные батареи, а движителем был парус в форме трапеции.

...идею устанавливаемого на беспилотник прибора, позволяющего отследить опасное сближение с другими машинами, его создатели позаимствовали...у саранчи. Этим насекомым удается не сталкиваться ни между собой, ни с попавшимися на их пути птицами – и это несмотря на то, что в стаях саранчи плотность особей достигает 80 миллионов на квадратный километр!

Что читать в «Кванте» о транспорте

(публикации последних лет)

1. «Как воздух сопротивляется движению тела» – 2015, №1, с.35;

2. «Ракета на водяном паре...» – 2016, Приложение №2, с.87;

3. «Движение автомобилей и живых существ...» – 2017, №1, с.36;

4. «Какой бывает колея» – 2017, №7, с.21;

5. «Потеря управляемости» – 2018, №7, с.2.

Материал подготовил А.Леонович

Вокруг ортотреугольника

П.СЕРГЕЕВ, А.САВЕЛЬЕВА

Авторы посвящают эту статью своему общему учителю – великому знатоку геометрии Рафаилу Калмановичу Гордину, которому в этом году исполнилось 70 лет.

Посмотрите внимательно на рисунок 1. Этот чертеж придуман Р.К.Гординым. На

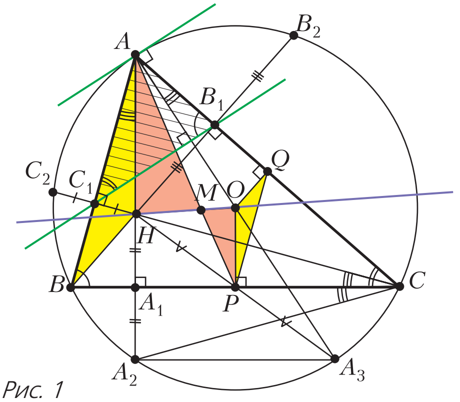


Рис. 1

нем отображено много интересных геометрических утверждений. Если вы сходу можете назвать 5–6 верных утверждений, которые вы узнаете на этом чертеже, то эту статью вам можно не читать. Наше послание адресовано тем, кто уже почувствовал красоту геометрии, но сталкивается с трудностями при решении творческих геометрических задач. Дело в том, что, приступая к таким задачам, полезно обладать некоторым багажом геометрических знаний, умением узнавать некоторые геометрические конструкции. Для этого, конечно, надо знать эти конструкции. Наш рассказ как раз и посвящен тем фактам, не зная которых, можно столкнуться со сложностями при решении даже довольно простых задач. Напротив, разобравшись в нашем чертеже – будем называть его здесь *главным* чертежом, – как мы сейчас убедимся, можно справиться уже и с относительно сложными задачами. Мы принципиально в нашем изложении ограничимся только методами и фактами, присутствующими в любом школьном учебнике геометрии.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20190605

Приступим к делу. Точками A_1, B_1 и C_1 на главном чертеже обозначены основания высот, проведенных из вершин A, B и C соответственно, точкой H – пересечение этих высот (*ортоцентр*), точкой O – центр описанной окружности. Для начала давайте заметим очень полезное равенство: $\angle C_1B_1A = \angle CBA$ (конечно же, тогда и $\angle B_1C_1A = \angle BCA$). Проще всего это доказать с помощью *метода вспомогательной окружности* (рис.2). Действительно, из то-

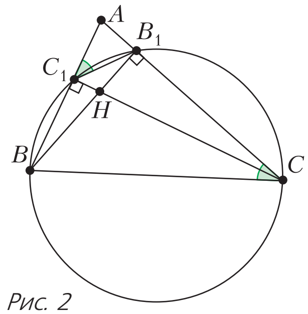


Рис. 2

чек C_1 и B_1 отрезок BC виден под прямым углом, значит, C_1 и B_1 лежат на окружности, построенной на BC как на диаметре. Следовательно, точки B, C_1, B_1, C лежат на одной окружности. Тогда $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$.

Тем самым, ΔAB_1C_1 подобен ΔABC. Но с каким коэффициентом? Здесь нам поможет совсем другое рассуждение, которое, кстати, еще раз доказывает равенство указанных выше углов.

Коэффициент подобия – это отношение соответствующих сторон. Треугольник BAB_1 – прямоугольный, следовательно, $\frac{AB_1}{AB} = \left|\cos\angle BAC\right|$ – коэффициент подобия. Если провести аналогичное рассуждение для ΔCAC_1, получим другое доказательство подобия ΔBAC и ΔBA_1C_1.

Итак, мы доказали важное утверждение, которое очень часто используется при решении геометрических задач:

Теорема 1. *Пусть C_1 и B_1 – основания высот, опущенных из вершин C и B треугольника ABC соответственно. Тогда $\Delta AC_1B_1 \sim \Delta ACB$ с коэффициентом $\left|\cos\angle CAB\right|$.*

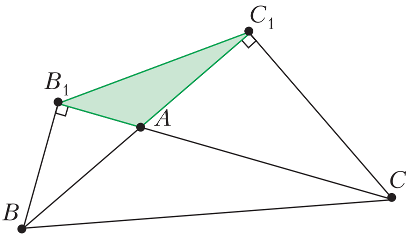


Рис. 3

Рисунок 3 объясняет, зачем в формулировке теоремы использован модуль.

Из изложенного выше сразу следует такое утверждение.

Теорема 2. *Высоты треугольника являются биссектрисами (или внешними биссектрисами) его ортотреугольника, т.е. треугольника, образованного основаниями высот.*

В обозначениях нашего чертежа это означает, что $\angle C_1A_1A = \angle B_1A_1A$, $\angle A_1B_1B = \angle C_1B_1B$ и $\angle B_1C_1C = \angle A_1C_1C$.

Мы советуем доказать этот факт самостоятельно. Давайте разберем, как уже один этот факт может помочь справиться с не очень простой задачей. Рассмотрим задачу из Британской математической олимпиады 2012 года (автор – Dr. David Monk).

Задача 1. Дан остроугольный треугольник ABC. Пусть D, E и F – основания высот, опущенных из вершин A, B и C соответственно. Докажите, что $DE + DF \le BC$, и найдите треугольники, для которых выполняется равенство.

Решение. На рисунке 4 отмечены (уже известные нам) равные углы. Кроме того, раз есть сумма отрезков, хотелось бы «выпрямить» конфигурацию, отложив их на одной прямой. Также ясно, что потребуется неравенство треугольника. Отсюда мы и получаем решение. Пусть F' – образ F при отражении относительно BC. Заметим, что так как $\angle BFC = \angle BEC = \angle BF'C = 90°$, то $BFECF'$ вписан в окружность с диаметром BC. Отметим, что $\angle EDC = \angle FDB$ (по теореме 2), а также $\angle BDF' = \angle BDF$ из соображений симметрии. Следовательно, E, D и F' лежат на одной прямой. Также из симметрии можно заметить, что $DF = DF'$, следовательно, $F'E = ED + DF$. Осталось доказать, что $EF' \le BC$. Действительно, BC – диаметр, а следовательно, длиннейшая хорда окружности.

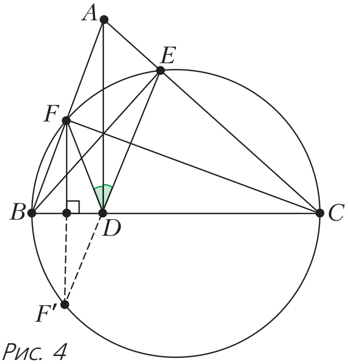


Рис. 4

Заметим, что равенство достигается тогда и только тогда, когда $F'E$ – тоже диаметр, следовательно, D – центр окружности, тогда $BD = DC$, поэтому AD – медиана и высота треугольника. Значит, ΔABC – равнобедренный.

Вернемся к теореме 1. Рассмотрим в качестве одного из ее многочисленных применений задачу Санкт-Петербургской олимпиады школьников (автор – С.Л.Берлов).

Задача 2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Биссектриса внешнего угла при вершине C пересекает прямые AB и A_1B_1 в точках L и K соответственно (рис.5). Оказалось, что $CL = 2CK$. Найдите угол C треугольника.

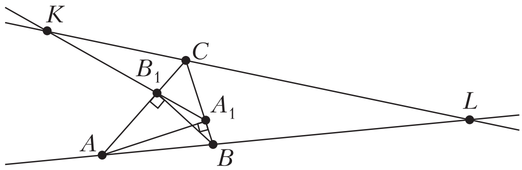


Рис. 5

Решение. Докажем, что $\Delta KB_1C \backsim \Delta LBC$. Действительно, $\angle B_1CK = \angle BCL$ (рис.6), так как CL – биссектриса внешнего угла при

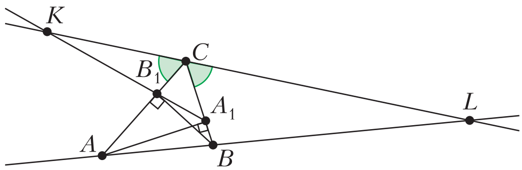


Рис. 6

вершине C. Видим, что $\angle KB_1C = 180° - \angle A_1B_1C = 180° - \angle ABC$ (по теореме 1), $180° - \angle ABC = \angle CBL$. Следовательно, $\Delta KB_1C \backsim \Delta LBC$ по двум углам. Из подобия треугольников следует равенство отношений: $\frac{CK}{CL}=\frac{CB_1}{CB}$. По условию, $\frac{CK}{CL}=\frac{1}{2}$. По теореме 1, $\frac{CB_1}{CB}=|\cos\angle ACB|$ как коэффициент подобия ΔCB_1A_1 и ΔCBA. Следовательно, $|\cos\angle ACB|=\frac{1}{2}$, откуда $\angle ACB=60°$ (так как по условию этот угол острый).

Примените теперь самостоятельно теорему 1 в следующей задаче.

Задача 3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки E и F, причем $\angle EAF=45°$. Отрезки AE и AF пересекают диагональ BD в точках P и Q. Докажите, что $\frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta APQ}}=2$.

Нельзя не отметить, что чаще, конечно, теорема 1 служит лишь одним из необходимых шагов решения, а не является ключевой идеей задачи. Вернемся к основному чертежу. Легко заметить следующее.

Теорема 3. *Касательная к окружности, описанной около треугольника ABC, проведенная в точке A, параллельна прямой B_1C_1.*

Доказательство получается из теоремы 1 простым подсчетом углов. Действительно, пусть F – точка на касательной, лежащая в другой полуплоскости относительно AB, чем точка C (рис.7). Тогда $\angle BAF$ равен $\angle ACB$

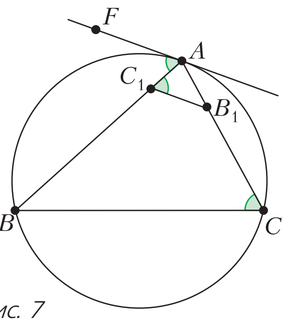


Рис. 7

как угол между касательной и хордой, а тот, в свою очередь, равен $\angle AC_1B_1$. Отсюда $AF \parallel C_1B_1$, так как накрест-лежащие углы равны.

Решите теперь следующую задачу самостоятельно.

Задача 4. Точки касания вписанной в треугольник окружности соединены отрезками, и в полученном треугольнике проведены высоты. Докажите, что прямые, соединяющие основания этих высот, параллельны сторонам исходного треугольника.

Кстати, заметим, что по ходу дела мы с вами доказали еще один факт.

Теорема 4. *В обозначениях нашего главного чертежа $\angle BAH=\angle OAC$. Тем самым, прямые AA_1 и AO симметричны относительно биссектрисы $\angle A$.*

В качестве примера применения теоремы 3 рассмотрим задачу из регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике (автор – Л.А.Емельянов).

Задача 5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Окружность Ω, описанная около треугольника ABC, пересекает прямую A_1C_1 в точках A' и C'. Касательные к Ω, проведенные в точках A' и C', пересекаются в точке B'. Докажите, что прямая BB' проходит через центр окружности Ω.

Решение. Пусть O – центр Ω. Проведем отрезок OB' (рис.8). Он перпендикулярен

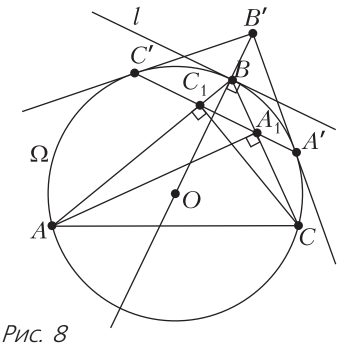


Рис. 8

$A'C'$ из соображений симметрии. Радиус OB перпендикулярен прямой l, где l – касательная к Ω в точке B. Прямая l параллельна $A'C'$ по теореме 3, следовательно, $OB \perp A'C'$. Так как перпендикуляр из O на $A'C'$ единственен, точки O, B и B' лежат на одной прямой.

Решите следующую задачу самостоятельно.

Задача 6. В остроугольном треугольнике MKN проведена биссектриса KL. Точка X на стороне MK такова, что $KX=KN$. Докажите, что прямые KO и XL перпендикулярны (O – центр описанной окружности треугольника MKN).

Вернемся к нашему главному чертежу. Исходя из него, логично предположить, что точки A_2, B_2 и C_2 (симметричные ортоцентру H относительно сторон треугольника) лежат на описанной окружности треугольника ABC. И действительно, верна следующая теорема.

Теорема 5. *Точки, симметричные точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника ABC относительно прямых, содержащих его стороны, лежат на описанной окружности этого треугольника.*

Доказать эту теорему несложно, но надо аккуратно следить за логикой рассуждений. В обозначениях главного чертежа, $\Delta BAA_1 \backsim \Delta BCC_1$, так как $\angle ABC$ – общий, $\angle AA_1B = \angle CC_1B = 90°$. Следовательно, $\angle BAA_1 = \angle C_1CB$. Продлим AA_1 до пересечения с окружностью, описанной около ΔABC. Пусть A_2 – точка пересечения. Тогда $\angle BAA_2 = \angle A_2CB$ (как углы, опирающиеся на одну дугу). Значит, A_1C – биссектриса и высота, а следовательно, и медиана ΔA_2A_1C. Таким образом, A_2 – образ H при отражении относительно BC.

Этот факт очень часто используется при решении геометрических задач. Давайте применим его в следующей не очень простой задаче из Московской математической олимпиады (автор – А.А.Заславский).

Задача 7. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Точки P и Q симметричны точке C относительно прямых AB и AD соответственно (рис.9). Докажите, что прямая PQ

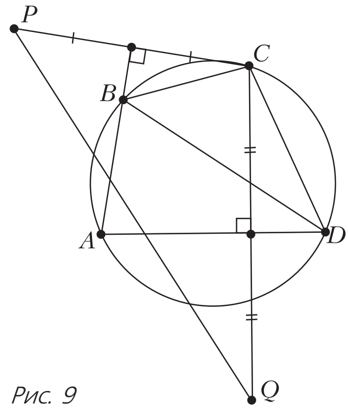


Рис. 9

проходит через ортоцентр (точку пересечения высот) H треугольника ABD.

Решим эту задачу вместе. Для большего интереса разберем, как будут выглядеть наши конструкции в случае тупого угла C (остроугольный случай рассматривается аналогично).

Решение. Пусть BB_1 – высота, опущенная из точки B на AD, H – точка пересечения BB_1 и PQ (рис.10). Пусть H' – точка H, отраженная относительно AD. Докажем, что

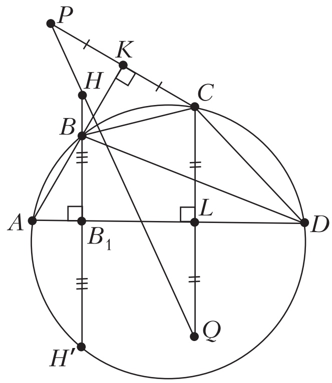


Рис. 10

H' лежит на окружности, описанной около $ABCD$. Пусть K – середина PC, L – середина CQ. Углы CDL и KBC равны по свойству вписанного четырехугольника. Поскольку $\angle DLC = \angle CKB = 90°$, то $\Delta CDL \backsim \Delta CBK$. Следовательно, $\angle DCL = \angle BCK$. Тогда $\angle DCL + \angle LCB = \angle LCB + \angle BCK$, откуда $\angle DCB = \angle LCK$. Также из подобия треугольников CDL и CBK следует равенство отношений:

$$\frac{CL}{CD} = \frac{CK}{CB} \Rightarrow \frac{2CL}{CD} = \frac{2CK}{CB} \Rightarrow \frac{CQ}{CD} = \frac{CP}{CB}.$$

Значит,

$$\Delta DCB \backsim \Delta QCP$$

по отношению двух сторон и углу между ними. Следовательно, $\angle CDB = \angle CQH$. Прямые HH' и CQ параллельны, поэтому $\angle H'HQ = \angle HQC$ как накрест-лежащие углы при параллельных прямых и секущей HQ. Из симметрии относительно LB_1 $QH'HC$ – равнобокая трапеция. Значит, хорда CB видна из точек H' и Q под одним углом: $\angle HH'C = \angle QHH' = \angle CDB$. Следовательно, H' лежит на окружности $ABCD$. Тогда H – точка на высоте BB_1 треугольника DBA, которая при отражении относительно AD попадает на описанную окружность треугольника ABD. Следовательно, H – ортоцентр.

Теперь можно решить следующую задачу самостоятельно.

Задача 8. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник ABC по точкам A_1,

B_1 и C_1, симметричным точке пересечения высот (ортоцентру) треугольника относительно прямых BC, CA и AB.

Снова обратимся к главному чертежу. Легко заметить, что два желтых треугольника подобны: $\Delta OQP \sim \Delta HBA$, где P, Q – середины сторон BC и AC соответственно. По сути, мы это с вами уже почти доказали. Действительно, $AH \parallel OP$, $BH \parallel OQ$, $AB \parallel QP$.

Отсюда сразу следует очень важный факт: $AH = 2OP$. В виду очень частого использования, сформулируем это в виде теоремы.

Теорема 6. *Расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанной окружности до противоположной стороны.*

Кстати, тем самым мы с вами доказали, что точки H, M и O лежат на одной прямой (которая называется *прямая Эйлера*), притом расположены в отношении $HM : MO = 2 : 1$. Но это уже отдельная, очень интересная тема. Тем, кто хочет дальше углубиться в исследование этого вопроса, мы советуем начать со статьи И.Шарыгина и А.Ягубьянца «Окружность девяти точек и прямая Эйлера» («Квант» №8 за 1981 г.).

Попробуем теперь увидеть и применить теорему 6 в задаче из старинного «Собрания геометрических теорем и задач» Е.Пржевальского (М.: Типография Г.Лисснера и Д.Собко, 1909).

Задача 9. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$; H_a, H_b, H_c и H_d – точки пересечения высот треугольников BCD, ACD, ABD и ABC соответственно. Докажите, что четырехугольник $H_aH_bH_cH_d$ равен четырехугольнику $ABCD$.

Решение. Докажем, что стороны четырехугольника $H_aH_bH_cH_d$ соответственно равны и параллельны сторонам четырехугольника $ABCD$.

Докажем, что $H_cH_d = CD$ и $H_cH_d \parallel CD$ (рис.11). Рассмотрим треугольники ADB и ACB. Сторона AB и описанная окружность треугольников общая, следовательно, по теореме 6, $CH_d = DH_c$. Так как они при этом еще и перпендикулярны AB, то CDH_cH_d – параллелограмм. Следовательно, отрезок CD равен и параллелен H_cH_d. Аналогичные рассуждения верны и для остальных трех отрезков, что и доказывает наше утверждение.

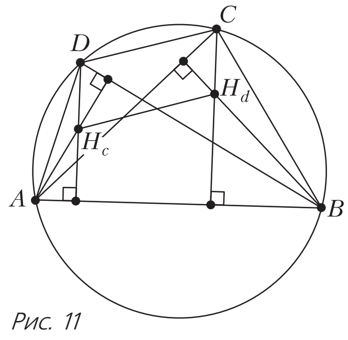


Рис. 11

В следующей задаче попробуйте разглядеть теорему 6 самостоятельно.

Задача 10. Найдите углы остроугольного треугольника ABC, если известно, что его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH, где O – центр описанной окружности, H – точка пересечения высот треугольника ABC.

Наконец, докажем еще один (не отраженный на главном чертеже) метрический факт. Оказывается, что длину отрезка AH можно легко выразить через радиус описанной окружности и угол A.

Теорема 7. *Пусть R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC, $\angle BAC = \alpha$, H – ортоцентр треугольника (рис.12). Тогда* $AH = 2R|\cos\alpha|$.

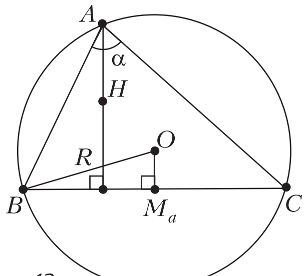


Рис. 12

Доказательство. Пусть $\angle BAC \le 90^\circ$. Пусть M_a – середина стороны BC, O – центр описанной окружности ΔABC. Угол BOC равен 2α, как центральный угол дуги BC. Так как OM_a – медиана равнобедренного треугольника BOC, то $\angle BOM_a = \frac{\angle BOC}{2} = \alpha$ (рис.13). Следовательно, $OM_a = BO\cos\alpha = R\cos\alpha$. По теореме 6, $AH = 2HM_a = 2R\cos\alpha$.

С тупоугольным треугольником аналогично, только $\angle BOM_a = 180^\circ - \alpha$. Поэтому в формулировке теоремы стоит $|\cos\alpha|$.

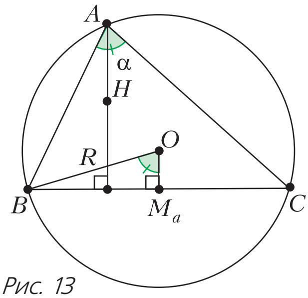


Рис. 13

Знание этого факта может очень помочь при решении задач. Например, рассмотрим задачу из Московской устной олимпиады по геометрии (автор – А.А.Заславский).

Задача 11. В остроугольном треугольнике ровно один из углов равен $60°$. Докажите, что прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения медиан треугольника, отсекает от него равносторонний треугольник (рис.14).

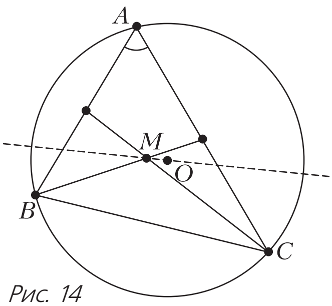


Рис. 14

Решение. По доказанному ранее, ортоцентр, точка пересечения медиан и центр описанной окружности лежат на одной прямой, поэтому прямая, данная в условии содержит точку пересечения высот. Обозначим вершины треугольника A, B и C, $\angle BAC = 60°$. Пусть H – ортоцентр треугольника, O – центр его описанной окружности, K, L – точки пересечения OH с AB и

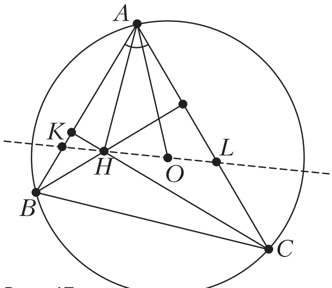


Рис. 15

AC соответственно (рис.15). Тогда, по теореме 7, $AH = 2R\left|\cos\angle BAC\right| = R = AO$. Следовательно, ΔOAH равнобедренный, откуда $\angle AOK = \angle AHL$. Так как, по доказанному ранее, $\angle BAO = \angle CAH$, то $\Delta AHL = \Delta AOK$ по стороне и двум углам. Значит, $AK = AL$. Следовательно, ΔKAL равнобедренный, а значит (так как $\angle A = 60°$), и равносторонний.

Как всегда, теперь вам предстоит решить еще одну задачу уже самостоятельно.

Задача 12. В треугольнике ABC высоты или их продолжения пересекаются в точке H, а R – радиус его описанной окружности. Докажите, что если $\angle A \le \angle B \le \angle C$, то $AH + BH \ge 2R$.

В заключение приведем несколько задач для самостоятельного решения, ключевые идеи которых связаны с нашим главным чертежом.

Задача 13. Докажите, что в прямоугольном треугольнике ортоцентр треугольника, образованного точками касания сторон с вписанной окружностью, лежит на высоте, проведенной из прямого угла.

Задача 14. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 60°$, $\angle A = 45°$. Пусть M – середина BC, H – ортоцентр. Докажите, что прямая MH проходит через середину дуги AB описанной окружности треугольника ABC.

Задача 15. В треугольнике ABC точка H_1 симметрична ортоцентру H относительно вершины C, а точка C_1 симметрична точке C относительно середины стороны AB. Докажите, что центр O окружности, описанной около треугольника ABC, является серединой отрезка H_1C_1.

Задача 16. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Оказалось, что точка C', симметричная точке C относительно середины отрезка A_1B_1, лежит на прямой AB. Докажите, что описанная окружность треугольника A_1B_1C' касается прямой AB.

Задача 17. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты BB_1 и CC_1. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K, отличной от A. Докажите, что прямая KH проходит через A_0, где A_0 – середина BC, H – ортоцентр треугольника.

НАМ ПИШУТ

В статье В.Расторгуева «Четырьмя различными способами» в «Кванте» №12 за 2018 год был дан пример несимметричной фигуры, которую можно разрезать на 2 равные части 4 различными способами. Покажем, как построить несколько более простой пример.

Рассмотрим параллелограмм, составленный из 4 равнобедренных прямоугольных треугольников (рис.1). Для удобства разрежем его

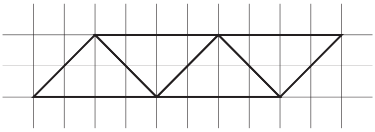


Рис. 1

на 16 меньших одинаковых треугольников. Все разрезы будут проходить по их границам.

На рисунках 2–5 показано, как разрезать параллелограмм на 2 равные части – красную

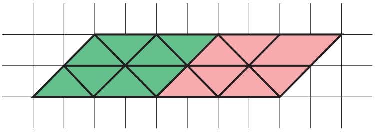


Рис. 2

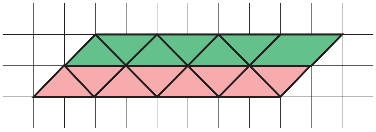


Рис. 3

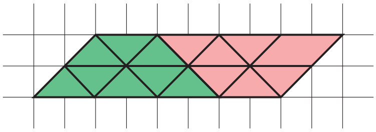


Рис. 4

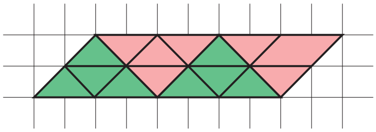


Рис. 5

и зеленую. Правда, на рисунке 5 части несвязные. Да и сам параллелограмм не подходит под условия задачи, потому что у него есть центр симметрии.

Исправим пример следующим образом. Основания треугольников, у которых эти основания снизу, заменим на части, показанные на рисунке 6. Аналогично поступим с верхними основаниями (рис.7). Тогда при таком же разрезании, как на рисунке 5, части будут получаться связными.

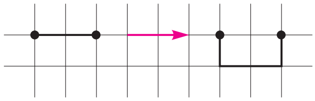


Рис. 6

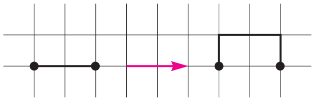


Рис. 7

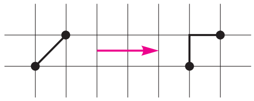


Рис. 8

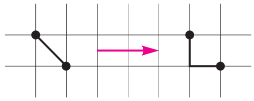


Рис. 9

Теперь исправим пример так, чтобы исходная фигура потеряла симметричность. Заменим боковые стороны, как показано на рисунках 8 и 9. Каждый треугольник превратится в трехклеточный уголок (рис.10 и 11).

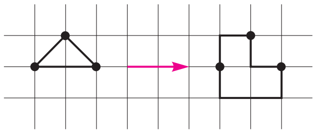


Рис. 10

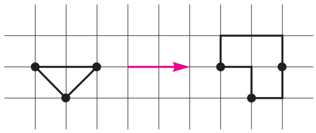


Рис. 11

Итоговый пример изображен на рисунке 12. Разрезы проводятся аналогично рисункам 2–5 по границам уголков.

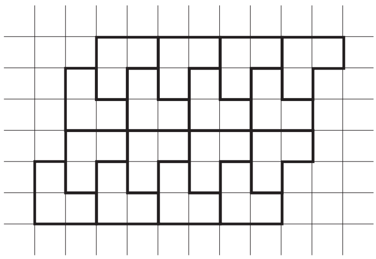


Рис. 12

В.Дорофеев

ДНИ ФИЗИКИ В ДУБНЕ

В середине апреля в подмосковной Дубне прошел VI Всероссийский научный фестиваль «Дни физики». Его организовали и провели Объединенный институт ядерных исследований, Учебно-научный центр ОИЯИ и Межшкольный физико-математический факультатив. На несколько дней Дом культуры «Мир» превратился в одну большую лабораторию: в малом зале демонстрировались опыты, в большом и выставочном залах проходил квест «Периодический закон». Затем состоялись традиционные математический праздник и мастер-классы, а День космонавтики был отмечен запуском ракет на Молодежной поляне. Ученики старших классов демонстрировали и объясняли посетителям различные физические закономерности на ими же сконструированном оборудовании. Эти эксперименты, всегда яркие, а иногда неожиданные и заставляющие задуматься, неизменно привлекают большое количество зрителей – от дошкольного до пенсионного возраста. Привлекательны они и для участников, поскольку, судя по их отзывам, нигде, кроме Дубны, в таком формате эти мероприятия не проводятся. Кроме того, иногородние участники смогли познакомиться с Дубной, пройдя увлекательный квест по городу и побывав в Музее истории науки и техники ОИЯИ, и поиграли в интеллектуальную игру «Что? Где? Когда?»

Вот несколько фрагментов из интервью, взятых у участников фестиваля.

Председатель оргкомитета фестиваля *М.В.Жабицкий* (ОИЯИ): Так много гостей у нас не было никогда, в этом году к нам приехали шесть команд. Это неоднократно участвовавшие московская гимназия № 1514, физмат-лицей из Санкт-Петербурга, команда из Брянска. Впервые приехали ребята из Волгограда, Глазова и подмосковной Истры. Из дубненских команд всегда активно участвуют ребята из физмат-факультативов УНЦ ОИЯИ и лицея «Дубна». Все эксперименты, представленные ребятами, непростые. Мы всегда приветствуем опыты, связанные по тематике с физикой частиц или физикой ядра. В год юбилея открытия Периодического закона наш традиционный квест для участников Дней физики посвящен этому событию. Ребята получают карту – Периодическую таблицу – и, проходя станции в большом зале ДК, решают разные задания по истории, географии, даже лингвистические задания, узнают, какую роль химические элементы играют в нашей повседневной жизни, какие из них были синтезированы в Дубне, а в конце получают заслуженный приз.

Учитель физики *М.В.Акимова* (лицей №1 г.Волгограда): Мы участвуем в фестивале впервые, а узнала я о Днях физики полтора года назад на проводимой УНЦ ОИЯИ школе учителей физики (после которой я попала еще и на школу в ЦЕРН). Мы отправили сюда две работы, которые подготовили мои девочки, и ждали решения. Когда узнали, что обе работы прошли, дети были очень рады. У нас физико-математический лицей, и физика с математикой преподаются углубленно, по физике ведется еще и проектная работа. Мы участвуем в областных фестивалях, конкурсах. А здесь – больше исследовательская работа, красивые эксперименты. Мы готовили их около четырех месяцев.

Ольга Голикова (Волгоград): Наш проект «Медленный танец» основан на идее Джеффа Либермана – американского изобретателя и художника. Все дело в стробоскопическом эффекте. Цветок, прикрепленный к соленоиду с катушками, быстро вибрирует, а светодиодная лента, запрограммированная специальным чипом, мерцает с частотой 80 Гц, чего наши глаза не замечают. Нам кажется, что освещение постоянное, а часть движений цветка мы просто не видим – возникает ощущение, что он танцует медленный танец.

Экспериментальной физикой со школьниками Дубны занимается *И.А.Ломаченков* (УНЦ ОИЯИ): Мы вынесли семь экспериментов на сегодняшние Дни физики. На самом деле их значительно больше, но многие мы уже показывали на предыдущих праздниках и повторяться не хотелось. Два опыта проводятся с ускорителями, что, с одной стороны, интересно, а с другой, они связаны с тематикой ОИЯИ, подчеркивают, в каком направлении работает Институт.

Опыт, связанный с электромагнетизмом, показывал *Иван Пачколин* (лицей №15 г.Глазова): Я демонстрирую модель генератора Фарадея. Учусь в восьмом классе, это физико-математический класс, и планирую поступать в физический или технический вуз. До начала демонстрации опытов для зрителей мы сами смотрели, что другие команды подготовили. Некоторые эксперименты меня заинтересовали. В Днях физики мы участвуем впервые, но обязательно приедем еще.

Восторженную реакцию малышей вызвали химические опыты «Пенная вечеринка» от студентов МФТИ.

Дарья Плащинская: Я учусь на первом курсе биофизического факультета. Мы готовились к этим опытам, некоторые реактивы нашли сами, некоторые дал наш лаборант, который даже обрадовался, что мы сами немножко наукой позанимаемся и детям что-то продемонстрируем. Мы много репетировали. Кажется, получилось. <Судя по эмоциям детей – еще как получилось!> Моя напарница Маша сюда приезжает уже несколько лет, она в восторге от праздника, очень любит Дубну. И мне город очень понравился, а любое мероприятие, связанное с наукой, тем более с моим родом деятельности, – это интересно. С нами еще ребята приехали, они помогают проводить квест. Мы обязательно и в следующем году приедем.

У истоков Дней физики в Дубне стоял член редколлегии журнала «Квант» преподаватель Межшкольного факультатива А.А.Леонович. На этом празднике он вместе с Универсальной библиотекой ОИЯИ представлял три свои книги из серии «Простая наука для детей»: «Физика без формул», «Чудеса техники», «Бионика: подсказано природой». Книги можно было получить, выиграв в блиц-викторине «Физика на вырост», которая привлекла много детей.

А.А.Леонович: Издательство АСТ <выпускающее книги серии «Простая наука для детей»> заинтересовано в популяризации своей работы, а где, как не на наших Днях физики, можно получить эти книги. Просто так мы их не дарим – нужно ответить на вопросы викторины, рассчитанной на детей до шестого класса, т.е. еще не начавших изучать физику в школе.

Второй год приходит на праздник со своей младшей дочерью *Боряна Калинова* (ОИЯИ): Хочу сказать слова благодарности организаторам, потому что устроить все это – огромный труд! У детей надолго останется в памяти встреча с «живой» наукой, когда все можно потрогать руками, а что-то и применить в жизни. Нам понравилось, мы очень довольны. Моя дочь Рада учится во втором классе, но она смотрит образовательные передачи на телеканале «Да Винчи» и здесь некоторые эксперименты – с жидкостями, с ракетой на сжатом воздухе – смотрела с понимаем. Говорит: «это я уже знаю».

Год от года все больше зрителей привлекают зрелищные химические и физические опыты, проводимые *Д.К.Дрябловым* (Лаборатория физики высоких энергий ОИЯИ) и *А.Е.Злотниковой* (Музей истории науки и техники ОИЯИ). В этот раз программа их шоу стала еще обширнее: от простых, но эффектных обесцвечивания йода с помощью аскорбиновой кислоты и создания киношной «крови» до вызывающих восторг заполненного большого зала Дома культуры гигантской «зубной пасты» для слона, «горящей» руки и азотного «взрыва».

Праздник прошел. Вы не были на нем? Обязательно приходите в следующем году!

Материал подготовила О.Тарантина,
фото представила Е.Пузынина

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

Национальный исследовательский университет «МИЭТ» на протяжении многих лет проводит для старшеклассников олимпиады по математике, физике и информатике, которые пользуются большой популярностью среди школьников страны. С 2015 года в заочной (дистанционной) форме проводится олимпиада школьников «РИТМ МИЭТ». Ежегодно в 9 секциях этой олимпиады принимают участие более 2000 человек. В 2018 году университет организовал очную Физико-математическую олимпиаду МИЭТ, которая проходит в нескольких десятках городов России и стран СНГ. С 2019 года также проводится олимпиада школьников «Электронный наномир».

Ниже приведены задачи по физике, предлагавшиеся на заключительном туре заочной олимпиады «РИТМ МИЭТ», а также варианты по физике для учащихся 10 и 11 классов очной Физико-математической олимпиады МИЭТ.

Интернет-олимпиада «РИТМ МИЭТ»

ФИЗИКА

1. Мальчик, бросая камень со скоростью $v_0 = 20$ м/с с крыши дома, определил максимальную горизонтальную дальность полета. Спустившись на землю и повторив броски камня с той же начальной скоростью v_0, он заметил, что максимальная горизонтальная дальность полета камня уменьшилась в $n = 3/2$ раза. На какой высоте находится крыша дома?

2. Два одинаковых ящика высотой $h = 0{,}5$ м каждый стоят на поверхности пола. Между ящиками вертикально вставлена жесткая легкая доска длиной $l = 1{,}5$ м, как показано на рисунке 1. К верхнему концу доски приложили горизонтальную силу F и стали постепенно ее увеличивать. При $F = 100$ Н один из ящиков пришел в поступательное движение. Чему равен вес каждого

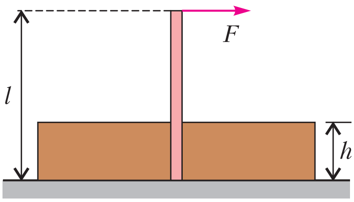


Рис. 1

ящика P, если коэффициент трения между ящиком и полом $\mu = 0,2$?

3. Однородное цилиндрическое тело плавает в воде так, что его ось вертикальна. Чтобы медленно погрузить тело в воду полностью, требуется совершить работу $A_\downarrow$, а чтобы свободно плавающее тело полностью вытащить из воды, требуется совершить работу $A_\uparrow$. В обоих случаях тело перемещают поступательно. Найдите плотность тела, если отношение работ $A_\downarrow / A_\uparrow = 4$. Плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м^3.

4. Шар-поршень массой $M = 2$ кг находится в равновесии в цилиндрическом сосуде радиусом $R = 5$ см, плотно прилегая к его стенкам (рис.2). Центр шара находится на высоте $h = 2R$ от дна сосуда. Какую минимальную силу нужно приложить к шару, чтобы прижать его к дну сосуда и удерживать в таком положении? Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа, газ в сосуде считать идеальным, трением пренебречь.

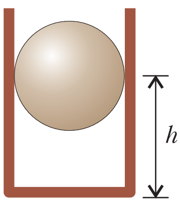


Рис. 2

5. Поршень в горизонтальном цилиндрическом сосуде с одноатомным идеальным газом занимает в равновесии такое положение, что отношение объемов газа слева и справа от поршня равно $n = 2$ (рис.3).

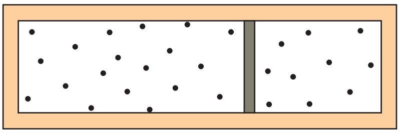


Рис. 3

Температура в большей части сосуда $T_1 = 300$ К, а в меньшей $T_2 = 350$ К. Сосуд теплоизолирован, но поршень медленно проводит тепло и через некоторое время в сосуде устанавливается тепловое равновесие. Определите установившуюся температуру газа T, а также новое соотношение n' объемов газа слева и справа от поршня.

6. Точечные заряды $4q$, $-q$ и $4q$ расположены на одной прямой. Расстояние между зарядом $-q$ и каждым из зарядов $4q$ равно a. Найдите расстояние от заряда $-q$ до точек, в которых напряженность электрического поля равна нулю.

7. В приведенной на рисунке 4 схеме сопротивление $R = 10$ Ом, ЭДС источника

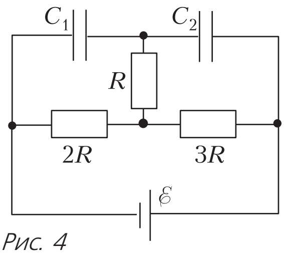


Рис. 4

$\mathcal{E} = 120$ В, его внутреннее сопротивление пренебрежимо мало а) Определите ток I через источник. б) Во сколько раз отличаются заряды конденсаторов, если их емкости одинаковы?

8. Две несмешивающиеся жидкости, с показателями преломления n_1 и $n_2 = 1,33$, находятся в прозрачном тонкостенном сосуде с вертикальными плоскими стенками. Определите показатель преломления n_1, если известно, что луч света, падающий на стенку сосуда под углом $\alpha = 60°$, после преломления на границах жидкостей выходит из противоположной стенки сосуда под углом $\beta = 45°$ (рис.5).

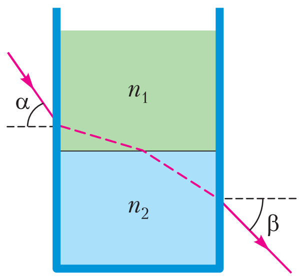


Рис. 5

Физико-математическая олимпиада МИЭТ

ФИЗИКА

10 класс

Вариант 1

1. Тело движется прямолинейно с постоянным ускорением, отличным от нуля. За первую секунду движения тело прошло такой же путь s = 6 м, что и за четвертую секунду. Определите величину ускорения тела.

2. Шарик массой m = 50 г, висящий на длинной нити, отводят в сторону так, что нить становится горизонтальной, и отпускают с нулевой начальной скоростью. Найдите: а) максимальное натяжение нити при движении шарика; б) натяжение нити в момент, когда полное ускорение шарика направлено горизонтально. Нить невесомая и нерастяжимая. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м/с}^2$.

3. На гладком горизонтальном столе покоятся две шайбы массами m и $2m$, соединенные легкой недеформированной пружиной. Легкой шайбе сообщают скорость v_0 вдоль оси пружины. Чему равна энергия деформации пружины в момент времени, когда скорость легкой шайбы, не изменив направления, уменьшится в три раза?

4. Баллон с гелием для воздушных шариков имеет объем V = 10 л и позволяет надуть, как пишут производители, N = 50 латексных (резиновых) шариков диаметром d = 20 см. Определите давление в баллоне. Считайте, что в шарике давление близко к атмосферному p_0 = = 100 кПа.

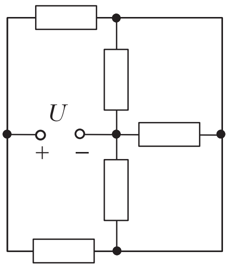


Рис. 6

5. В схеме, изображенной на рисунке 6, напряжение на клеммах источника U = = 10 В, сопротивление каждого резистора R = 60 Ом. Определите ток через источник.

Вариант 2

1. Тело движется прямолинейно с постоянным ускорением, отличным от нуля. За первую секунду движения тело прошло такой же путь $s = 6$ м, что и за третью секунду. Определите начальную скорость тела.

2. Шарик массой m = 50 г, висящий на длинной нити, отводят в сторону так, что нить становится горизонтальной, и отпускают с нулевой начальной скоростью. Найдите: а) силу натяжения нити в момент времени, когда нить составит угол $\alpha = 60°$ с вертикалью; б) угол β между нитью и вертикалью в момент времени, когда вертикальная составляющая скорости шарика максимальна. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м/с}^2$.

3. На гладкой горизонтальной поверхности находятся два одинаковых бруска массами m = 1 кг, соединенные легкой пружиной жесткостью $k = 200$ Н/м. Одному из брусков сообщают скорость $v_0 = 1$ м/с в направлении второго бруска по линии, соединяющей их центры. Определите величину максимального растяжения пружины при последующем движении брусков.

4. Баллон с гелием объемом V_1 = 10 л подсоединили к первоначально открытому баллону с воздухом объемом V_2 = 5 л. Давление в системе теперь стало равным $p_2 = 5p_0$, где p_0 = = 100 кПа – атмосферное давление в условиях эксперимента. Определите начальное давление p_1 гелия в баллоне. Температура постоянная.

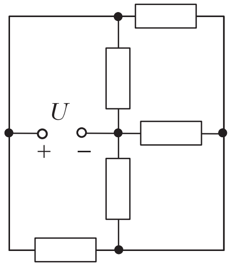


Рис. 7

5. В схеме, изображенной на рисунке 7, напряжение на клеммах источника U = = 12 В, сопротивление каждого резистора R = 6 Ом. Определите ток через источник.

11 класс

Вариант 1

1. Брусок массой m = 200 г прижимают к вертикальной стене с силой F = 3 Н, направленной под углом $\alpha = 60°$ к вертикали, как показано на рисунке 8. При этом брусок движется вниз с постоянной скоростью. Определите коэффициент трения между бруском и стеной. Ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м/с}^2$.

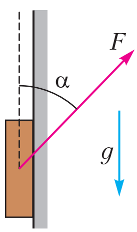


Рис. 8

2. Тележка массой $m_2 = 2$ кг покоится на гладком горизонтальном столе. На нее со скоростью $v_1 = 2$ м/с налетает тележка массой m_1 = 1 кг. После лобового удара тяжелая тележка движется в ту же сторону со скоростью $v_2 = 1{,}2$ м/с. а) С какой скоростью движется после удара легкая тележка? б) Какое количество теплоты выделилось при ударе?

3. При изобарном расширении идеального газа его объем увеличился на $\Delta V = 3$ л, а температура изменилась на $\delta = 30\%$. Чему равен первоначальный объем газа?

4. Небольшой заряженный шарик, подвешенный на легкой нерастяжимой нити, после начального толчка движется по окружности в вертикальной плоскости. В момент времени, когда нить составляла угол α с вертикалью, включили однородное электрическое поле, направленное вертикально (рис.9). После включения поля кинетическая энергия шарика в нижней точке траектории увеличилась на $\Delta W_1 = 0{,}1$ мДж, а в верхней точке траектории уменьшилась на $\Delta W_2 = 0{,}3$ мДж по сравнению со значениями кинетической энергии в этих точках до включения поля. Определите угол α. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

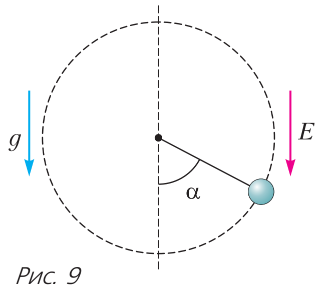


Рис. 9

5. Энергия конденсатора емкостью $C = 2$ нФ, включенного в идеальный колебательный контур, достигает при колебаниях максимального значения $W_m = 0{,}1$ мкДж через промежутки времени $\tau = 1$ мкс. Определите амплитуду колебаний тока в контуре.

Вариант 2

1. Брусок массой $m = 200$ г прижимают к вертикальной стене с силой $F = 8$ Н, направленной под углом $\alpha = 60°$ к вертикали, как показано на рисунке 8. При этом брусок движется вверх с постоянной скоростью. Определите коэффициент трения μ между бруском и стеной. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2. Тело массой $m_1 = 1$ кг налетело со скоростью $v_1 = 10$ м/с на покоящееся тело массой $m_2 = 2$ кг и остановилось. Определите: а) скорость второго тела после соударения; б) количество теплоты, выделившееся при ударе.

3. При изотермическом расширении идеального газа его объем увеличился на $\Delta V = 3$ л, а давление изменилось на $\delta = 30\%$. Чему равен первоначальный объем газа?

4. Небольшой заряженный шарик, подвешенный на легкой нерастяжимой нити, после начального толчка движется по окружности в вертикальной плоскости. В момент времени, когда нить составляла угол α с вертикалью, включили однородное электрическое поле, направленное вертикально (рис.10). После включения поля кинетическая энергия шарика в нижней точке траектории уменьшилась на $\Delta W_1 = 0{,}6$ мДж, а в верхней точке траектории увеличилась на $\Delta W_2 = 0{,}1$ мДж по сравнению со значениями кинетической энергии в этих точках до включения поля. Определите угол α. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

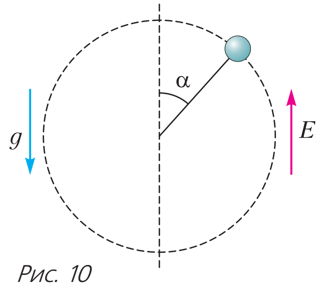


Рис. 10

5. В идеальном колебательном контуре, состоящем из конденсатора емкостью $C = 0{,}01$ мкФ и катушки, происходят гармонические колебания. Энергия конденсатора изменяется от максимального значения до нуля за время $\tau = 1$ мкс. Определите индуктивность катушки.

Публикацию подготовили Г.Гайдуков, И.Горбатый

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №5)

1. Не надо перекладывать ни одной спички! Можно просто повернуть лист бумаги на $180°$. Получится число 8281 (рис.1), которое является полным квадратом ($8281 = 91^2$).

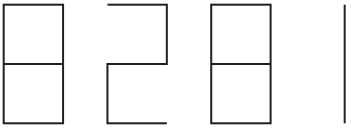


Рис. 1

2. 77.

Пусть у девочек по x тетрадей. Маша использовала $7+7(x-7)$ наклеек, а Света – $11+11(x-11)$. Так как все наклейки использованы, то $7+7(x-7)=11+11(x-11)$. Решив это уравнение, получим $x=17$. Значит, в каждом наборе было по $7+7(17-7)=77$ наклеек.

3. См. пример на рисунке 2.

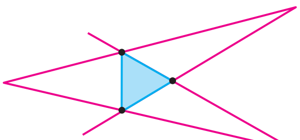


Рис. 2

4. Антон.

Какую-то камеру X они проехали в порядке Б, А, В, а камеру Y – в порядке В, А, Б. Предположим, что камеру X они проехали раньше. Предположим, что Антон не падал. Так как он самый быстрый и уже впереди Вовы, то он далее всегда будет впереди Вовы и ситуация «В, А, Б» не возникнет. Противоречие. Случай, когда Y они проехали раньше, чем X, рассматривается аналогично.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Большому колесу легче, чем маленькому, преодолевать бугры и камни на дороге. (Кроме того, с увеличением радиуса колеса уменьшается коэффициент трения качения.)

2. За верхнюю часть колес легче: больше вращающий момент (плечо силы равно диаметру колеса, в первом же случае – его радиусу).

3. Сила, с которой велосипедист может давить на педали, непостоянна: она максимальна на старте и становится равной нулю при такой скорости, когда период вращения педалей сравнивается со временем реакции велосипедиста (периодом нажатия на педаль и отпускания педали). После этого скорость уже не может возрастать.

4. Протектор служит для увеличения сцепления колеса с полотном дороги. Поперечные полосы нужны для ускорения автомобиля в прямом направлении, продольные (и расположенные под углом) препятствуют боковому смещению. Помимо этого, бороздки помогают в борьбе с аквапланированием, поскольку дают возможность воде вытекать вбок.

5. Если шины слегка спущены, то площадь соприкосновения с грунтом возрастает. Давление на грунт при этом уменьшается, как и глубина следа, – меньше вероятность застрять.

6. Чтобы сильнее прижать автомобиль к дороге на больших скоростях. При этом повышается устойчивость машины.

7. После подачи состава назад гораздо легче сдвигать его вперед, последовательно приводя в движение вагоны. Если же резко трогать состав с натянутыми сцепками вперед, может произойти разрыв ближайших к локомотиву сцепок, где их натяжение наибольшее.

8. Чтобы предупредить опрокидывание яхты при больших наклонах. Еще одно назначение киля – противодействовать боковому смещению (дрейфу) судна.

9. Заметим, что вращение в этих двух случаях происходит во взаимно перпендикулярных плоскостях. В первом случае колесо могло отбрасывать воду назад только нижней своей частью, во втором – поверхностью всех лопастей винта.

10. При переходе в море уменьшается глубина погружения судна, соответственно уменьшается сопротивление воды движению. При прежней мощности двигателя скорость судна относительно воды вырастает (молчаливо мы полагаем одинаковой вязкость речной и морской воды).

11. Нельзя, так как скорость движения воздушного шара равна скорости ветра.

12. В обоих случаях сила давления одинакова. Вертолет действует на воздух с силой, равной своей силе тяжести, а воздух передает действие этой силы на землю.

13. Баки с горючим располагаются в самолете так, что центры его тяжести с топливом и без топлива совпадают.

14. При дополнительной нагрузке необходимо увеличить угол атаки крыльев, чтобы повысить подъемную силу. Однако при этом возрастает и лобовое сопротивление, из-за чего скорость самолета становится меньше.

15. С ростом температуры уменьшается плотность, а значит, и массовый расход воздуха, поступающего в двигатель.

16. В системе отсчета, относительно которой ракета в данный момент покоится, вытекающие газы толкают ракету вперед – ее скорость в дальнейшем будет расти.

Микроопыт

Руль и педали позволяют выиграть в силе, цепная передача – в скорости.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №4)

29. а) Можно.
Пусть $N = \text{НОК}(1,2,\ldots,8) = 840$. Тогда после приведения дробей $\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{8}{N}$ к несократимому виду их знаменатели будут равны 1.
б) Можно.
Число $M = 5\cdot7\cdot8\cdot9$ кратно всем числам от 3 до 10, поэтому после приведения дробей $\frac{3}{M}, \frac{4}{M}, \ldots$ …, $\frac{10}{M}$ к несократимому виду их знаменатели будут равны 1. Они образуют арифметическую прогрессию. Знаменатель первой из них равен $M/3 = 840$, последней – $M/10 = 252$, их разность меньше 600.

30. 343.
Назовем ситуацию *ужасом*, если число можно представить в виде произведения четырех попарно различных натуральных чисел.
Рассмотрим число n, представимое в виде произведения трех попарно различных натуральных чисел как $a_1\cdot a_2\cdot a_3$ (другие n нас не интересуют). Среди чисел a_1, a_2 и a_3 ровно одно равно 1, иначе ужас: $n = 1\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3$. Не умаляя общности, пусть $a_1 = 1$.
Докажем, что среди чисел a_2 и a_3 одно равно 49. Предположим, что это не так. Но тогда ужас: $49n = 1\cdot49\cdot a_2\cdot a_3$. Противоречие. Снова не умаляя общности, $a_2 = 49$.
Таким образом, $n = 1\cdot7^2\cdot a_3$, где $a_3 \ne 1$ и $a_3 \ne 7^2$. Так как $49n = 1\cdot7\cdot7^2\cdot a_3$, то a_3 равняется 7 или 7^3 (иначе ужас). Если $a_3 = 7^3$, то $49n = 1\cdot7\cdot7^2\cdot7^4$ – ужас! Значит, $a_3 = 7$.
Покажем, что при $a_3 = 7$ (т.е. $n = 7^3$) условие задачи выполняется. Предположим, что с числом $49n$ случился ужас. Следовательно, $49n = 1\cdot7^{k_1}\cdot7^{k_2}\cdot7^{k_3}$, где k_1, k_2, k_3 – попарно различные натуральные числа. Но тогда $k_1 + k_2 + k_3 \ge 6$, значит, $49n \ge 7^6$ – противоречие! Аналогично можно показать, что с n также ужаса не произойдет. Так что $n = 7^3 = 343$.
Это решение было представлено командой математической группы Центра «Успех» Гатчинского муниципального района Ленинградской области.

31. Верно.
Рассмотрим точку C и отрезок AB одного с ней цвета; пусть C лежит ближе к B, чем к A. По отношению к AB точка C может занимать одну из 25 возможных позиций, потому что и по вертикали и по горизонтали разность координат A и C равна от 1 до 5 (отмеченные на рисунке 3 точки – это варианты расположения C). Значит, возможных углов не больше 25.

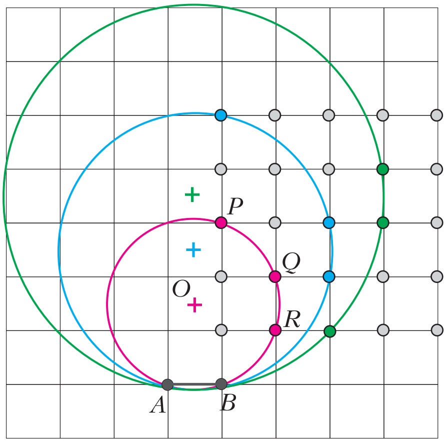


Рис. 3

Но из некоторых точек отрезок AB виден под одним и тем же углом: например, $\angle APB = \angle AQB = \angle ARB$. Это так, потому что точки P, Q, R лежат на одной, красной, окружности, проходящей через A и B; можно в этом убедиться, доказав, что $OA = OB = OP = \ldots$ Аналогично можно показать, что еще две тройки точек лежат на синей и на зеленой окружностях.
Тогда возможных углов не больше $25 - 2\cdot3 = 19$. Значит, среди 20 углов найдутся 2 одинаковых.

32. а) 2^{n-1}.
Сначала путник идет только вправо. Пусть он в каком-то городе C поменял направление движения. Тогда он никогда не сможет дойти до городов правее C. А значит, C может быть только самым последним городом. Таким образом, путник сначала движется вправо $n-1$ шагов, а потом влево $n-1$ шагов. Для каждого из первых $n-1$ шагов путник выбирает, по какой из двух дорог пойти; это можно сделать 2^{n-1} способами. На обратном пути выбора уже не остается.
б) $2^{n-2}\cdot6^{n-1}$.
Назовем те города, в которых пешеход меняет направление движения, *поворотными*. Пусть их номера в порядке возрастания C_1, C_2,…
В первом городе путнику точно придется поворачивать, так что $C_1 = 1$. При движении от 1 до C_2 он двигался только вправо. Допустим, после этого он продолжит движение вправо. Тогда при следу-

ющем своем посещении C_2 он развернется и некоторые дороги между 1 и C_2 останутся не пройденными. Значит, путник должен повернуть при первом своем посещении C_2. После этого он пойдет до 1, там развернется и снова пойдет до C_2. К этому моменту пройдены только все дороги от 1 до C_2. Теперь можно принять C_2 за начальный город и продолжить те же рассуждения.

Из сказанного выше получается, что по набору поворотных городов последовательность посещения городов восстанавливается однозначно. Наборов поворотных городов существует 2^{n-2}, так как первый и последний города точно поворотные, а каждый из остальных городов можно выбрать поворотным независимо от других.

Теперь рассмотрим одну из таких последовательностей посещения городов. Выясним, сколько существует путей с такой последовательностью городов. В каждом промежутке между двумя соседними городами 3 дороги; есть 3! = 6 способов выбрать, в каком порядке они встречаются в пути. Тогда упорядочить между собой дороги во всех промежутках можно всего 6^{n-1} способами. Значит, количество путей в 6^{n-1} раз больше, чем количество последовательностей городов (которых, как мы уже выяснили, 2^{n-2}).

Задача решена.

Заинтересовавшимся читателям предлагаем подумать над похожей, но более трудной задачей, где города идут по кругу:

По кругу расположено n городов (рис.4). Каждые два соседних города соединены между собой

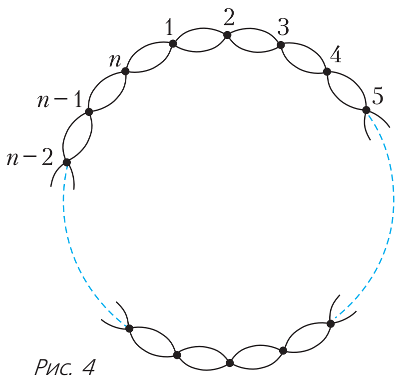


Рис. 4

а) двумя; б) тремя дорогами. Пешеход выходит из города 1 и хочет пройти по всем дорогам, причем по каждой дороге только один раз. Сколько существует таких маршрутов? Маршруты считаются разными, если они отличаются последовательностью выбора дорог.

Ответы: а) $(n+1)\cdot 2^{n+1}$; б) $2^n \cdot 6^{n+1} - 4\cdot 6^n$.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИЭТ»

ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА «РИТМ МИЭТ»

ФИЗИКА

1. $H = \dfrac{v_0^2\left(n^2-1\right)}{2g} = 25$ м. **2.** $P = \dfrac{Fl}{\mu h} = 1500$ Н.

3. $\rho = \dfrac{\rho_0}{1+\sqrt{A_\downarrow / A_\uparrow}} = \dfrac{\rho_0}{3} = 333\ кг/м^3$.

4. $F_{min} = 3\left(\pi R^2 p_0 + mg\right) \approx 2{,}4$ кН.

5. $T = \dfrac{(n+1)T_1T_2}{T_1+nT_2} = 315$ К, где $n = 2$; $n' = n\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{7}{3} = 2{,}33$.

6. $l = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **7.** а) $I = \dfrac{\mathscr{E}}{5R} = 2{,}4$ А; б) $\dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{2}{3}$.

8. $n_1 = \sqrt{n_2^2 + \sin^2\alpha - \sin^2\beta} \approx 1{,}42$.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА МИЭТ

ФИЗИКА

10 класс

Вариант 1

1. $a = \dfrac{2s}{3t_1^2} = 4\ м/с^2$, где $t_1 = 1$ с.

2. а) $T_{max} = 3mg = 1{,}5$ Н; б) $T = mg\sqrt{3} \approx 0{,}87$ Н.

3. $E = \dfrac{mv_0^2}{3}$. **4.** $p = p_0\left(1+\dfrac{\pi N d^3}{6V}\right) \approx 2{,}2$ МПа.

5. $I = \dfrac{6U}{5R} = 0{,}2$ А.

Вариант 2

1. $v_0 = \dfrac{3s}{2t_1} = 9$ м/с, где $t_1 = 1$ с.

2. а) $T = 3mg\cos\alpha = 0{,}75$ Н;

б) $\beta = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 55°$.

3. $\Delta l = v_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}} = 5$ см.

4. $p_1 = \dfrac{p_2\left(V_1+V_2\right) - p_0V_2}{V_1} = 7p_0 = 700$ кПа.

5. $I = \dfrac{2U}{R} = 4$ А.

11 класс

Вариант 1

1. $\mu = \dfrac{mg - F\cos\alpha}{F\sin\alpha} \approx 0{,}19$.

2. а) В обратную сторону со скоростью $v = 0{,}4$ м/с; б) $Q = 0{,}48$ Дж.

3. $V = \Delta V \dfrac{100\%}{\delta} = 10$ л .

4. $\cos\alpha = \dfrac{\Delta W_2 - \Delta W_1}{\Delta W_2 + \Delta W_1} = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 60°$.

5. $I_m = \dfrac{\pi\sqrt{2W_mC}}{\tau} \approx 62{,}8$ мА .

Вариант 2

1. $\mu = \dfrac{F\cos\alpha - mg}{F\sin\alpha} \approx 0{,}29$.

2. а) $v_2 = 5$ м/с ; б) $Q = 25$ Дж .

3. $V = \Delta V\left(\dfrac{100\%}{\delta} - 1\right) = 7$ л .

4. $\cos\alpha = \dfrac{\Delta W_1 - \Delta W_2}{\Delta W_1 + \Delta W_2} = \dfrac{1}{1{,}4} \approx \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = 45°$.

5. $L = \dfrac{4\tau^2}{\pi^2 C} \approx 40$ мкГн .

XL ТУРНИР ГОРОДОВ

(см. «Квант» №5)

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

1. Могло.
Пример с 11 числами: 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 1. Можно доказать, что больше 11 чисел не могло быть выписано. См. также более общую задачу 5 для 10–11 классов.

2. Пусть $(n-1)$-я перевернутая монета – X, а n-я – Y. Тогда между X и Y по часовой стрелке лежит $n - 1$ монет, а раз всего монет в круге $2n + 1$, то между Y и X по часовой стрелке лежит n монет (рис.5). Это значит, что $(n+1)$-й мы снова перевернем монету X.

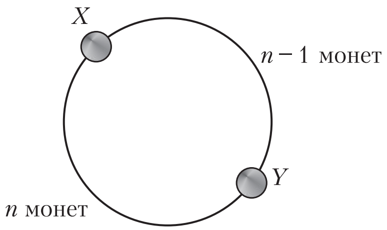


Рис. 5

И далее мы будем переворачивать уже переворачивавшиеся монеты, но в обратном порядке: ведь пропустить по часовой стрелке $n + 1$ монет – все равно, что пропустить против часовой стрелки $n - 2$ монет, …, пропустить по часовой стрелке $2n - 2$ монет – все равно, что пропустить против часовой стрелки 1 монету. А на последних двух шагах мы перевернем одну и ту же монету.
В итоге решкой вверх будет лежать только монета Y – она переворачивалась нечетное число раз, а все остальные монеты – четное.

3. Поскольку $n^2 = n(m+n) - mn$, из условия следует, что n^2 делится на $m + n$. Значит, $n^2 \ge m + n$.

4. Пусть KLM – один из таких треугольников, O – середина его основания KM (рис.6).

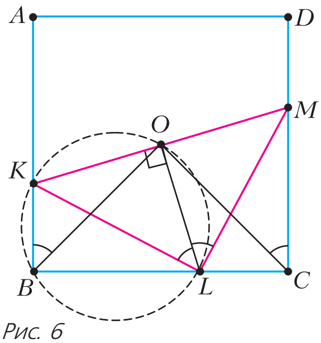


Рис. 6

Тогда LO – медиана, а значит, и биссектриса, и высота треугольника KLM. Поскольку углы KBL и LOK прямые, точки B и O лежат на окружности с диаметром KL, откуда $\angle KBO = \angle KLO = \alpha/2$. Аналогично получаем, что $\angle MCO = \angle MLO = \alpha/2$.
Тогда O – точка пересечения прямых, проведенных из вершин B и C под углом $\alpha/2$ к сторонам прямоугольника BA и CD соответственно, т.е. она не зависит от положения треугольника KLM.

5. Мысленно расположим шкатулки по кругу, изобразив их точками, делящими окружность на 12 равных дуг длины 1, и будем выражать расстояния между шкатулками в дугах. Между любыми двумя шкатулками с одной из сторон круга находится не более 6 дуг длины 1. Тогда нам достаточно придумать «шаблон» – четырехугольник с вершинами в шкатулках, – между вершинами которого реализуются все расстояния от 1 до 6. Пример такого шаблона изображен на рисунке 7 (четырехугольник с вершинами 1, 2, 5, 7), одна из его вершин помечена красным. Этот шаблон всегда можно повернуть так, чтобы он «накрыл» обе шкатулки с монетами. По-

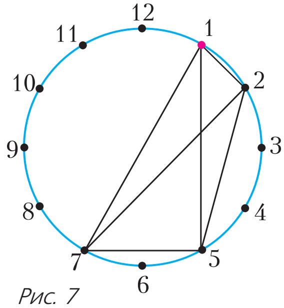


Рис. 7

мощник так и делает, а открывает шкатулку перед красной вершиной шаблона. Фокусник поворачивает шаблон так, чтобы красная вершина шла сразу за шкатулкой, открытой помощником, и находит монеты.

Это же решение можно изложить другими словами. Занумеруем шкатулки остатками по модулю 12. Если помощник открывает шкатулку с номером k, то фокусник открывает шкатулки с номерами $k + 1$, $k + 2$, $k + 5$ и $k + 7$ по модулю 12. Поскольку любая пара шкатулок имеет вид $\{n, n+1\}$, $\{n, n+2\}$, $\{n, n+3\}$, $\{n, n+4\}$, $\{n, n+5\}$ или $\{n, n+6\}$, то помощник всегда найдет четверку шкатулок нужного вида, содержащую пару шкатулок с монетами.

Существуют и другие шаблоны – например, четырехугольник с вершинами 1, 2, 4, 8.

См. также задачу 4 для 10–11 классов, где шкатулок 13.

10–11 классы

1. $\sqrt{3}$.

Пусть A, B, C – последовательные вершины шестиугольника, O – точка внутри него, и пусть $OA = OB = 1$, $OC = 2$.

Рассмотрим другую соседнюю с A вершину F. Тогда $FABC$ – равнобедренная трапеция (рис.8).

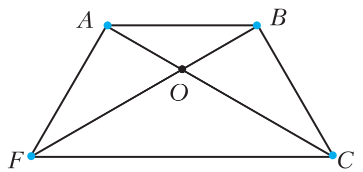


Рис. 8

Точка O лежит на общем серединном перпендикуляре ее оснований FC и AB, поэтому $OF = OC = 2$. Но $FC = 2AB$ (в правильном шестиугольнике главная диагональ в 2 раза больше стороны), откуда треугольники AOB и FOC подобны с коэффициентом 2. Поскольку AB и FC параллельны и $\angle BAO = \angle OCF$, точка O лежит на диагонали AC (и, аналогично, на диагонали BF). Тогда $\angle OBC = 120° - 30° = 90°$, и $BC = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$ по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника OBC.

2. Обязательно.

Пусть, например, $a > b$.

Первое решение. Дробь $\dfrac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$, очевидно, меньше a при всех натуральных n, но стремится к a при $n \to \infty$ (в самом деле, поделив числитель и знаменатель на a^n и заметив, что $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n \to 0$ при $n \to \infty$, получим, что числитель дроби стремится к a, а знаменатель – к 1). Значит, $a - 1 < \dfrac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} < a$ при достаточно больших n и не может быть целым. Противоречие.

Второе решение. Очевидно, что $b < \dfrac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} < a$ при всех натуральных n. Так как между b и a конечное число целых чисел, найдутся такие различные натуральные m и k, что $\dfrac{a^{m+1} + b^{m+1}}{a^m + b^m} = \dfrac{a^{k+1} + b^{k+1}}{a^k + b^k}$. Умножив на знаменатели и приводя подобные, получим $a^m b^k (a - b) = a^k b^m (a - b)$. Сократив на $a - b$, имеем $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{m-k} = 1$, откуда либо $a = b$, либо $m = k$ – противоречие.

3. Признак вписанности четырехугольника – равенство сумм противоположных углов, признак описанности – равенство сумм противоположных сторон. Если из центра вписанной в треугольник окружности опустить перпендикуляры на стороны треугольника, он разобьется на три четырехугольника, обладающих обоими этим свойствами. Чтобы разбить треугольник на 2019 таких четырехугольников, достаточно разбить его на 2019 : 3 = 673 треугольника (например, отрезками, исходящими из одной вершины), а потом каждый из них – на три четырехугольника, как показано выше.

4. Мысленно расположим шкатулки по кругу, изобразив их точками, делящими окружность на 13 равных дуг длины 1, и будем выражать расстояния между шкатулками в дугах. Между любыми двумя шкатулками с одной из сторон круга находится не более 6 дуг длины 1. Тогда нам достаточно придумать «шаблон» – четырехугольник с вершинами в шкатулках, – между вершинами которого реализуются все расстояния от 1 до 6. Пример такого шаблона изображен на рисунке 9 (четырехугольник с вершинами 1, 2, 5, 7), одна из его вершин помечена красным.

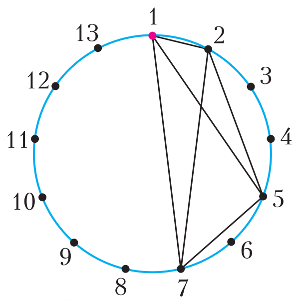


Рис. 9

Этот шаблон всегда можно повернуть так, чтобы он «накрыл» обе шкатулки с монетами. Помощник так и делает, а открывает шкатулку перед красной вершиной шаблона. Фокусник поворачивает шаблон так, чтобы красная вершина шла сразу за шкатулкой, открытой помощником, и находит монеты.

Это же решение можно изложить другими словами. Занумеруем шкатулки остатками по модулю 13. Если помощник открывает шкатулку с номером k, то фокусник открывает шкатулки с номерами $k+1$, $k+2$, $k+5$ и $k+7$. Поскольку любая пара шкатулок имеет вид $\{n, n+1\}$, $\{n, n+2\}$, $\{n, n+3\}$, $\{n, n+4\}$, $\{n, n+5\}$ или $\{n, n+6\}$, то помощник всегда найдет четверку шкатулок нужного вида, содержащую пару шкатулок с монетами.

Для знатоков. Мы описали *конечную проективную плоскость над полем* $\mathbb{Z}_3$, где шкатулки выступают в роли точек, а шаблоны – в роли прямых. На этой плоскости как раз 13 точек и 13 прямых, причем на каждой прямой лежит по 4 точки.

5. 1019 чисел.

Лемма. *Сумма любых сорока подряд записанных чисел не меньше* 80.

Доказательство. Пусть числа $a_1, \ldots, a_{40}$ записаны подряд. Среди чисел $b_0 = 0$, $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$, …, $b_{40} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{40}$ найдутся два числа b_i и b_j $(i < j)$ с одинаковым остатком при делении на 40. Тогда сумма $a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots$ $\ldots + a_j$ кратна 40, а значит, не меньше 80.

Оценка. Пусть выписано $n > 1019$ чисел. По лемме, сумма первых $1000 = 25 \cdot 40$ из них не меньше $25 \cdot 80 = 2000$. Сумма оставшихся чисел (их по крайней мере 20) не меньше 20. Значит, вся сумма не меньше 2020. Противоречие.

Пример. 25 групп 1, …, 1, 41 (в каждой группе 39 единиц и число 41) и затем 19 единиц.

СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1. Могут.

Пусть первый мудрец задумает числа 1, 2, 3, 22, 23, 24, 25 и назовет число 22. Тогда второй однозначно определит все числа, так как сумму 100 при этом можно получить лишь одним способом – взяв наименьшие возможные числа: 1, 2, 3, 22, 23, 24 и 25.

Замечание. Если первый задумает другие числа, то второй не сможет гарантированно угадать.

4. $\frac{1}{2}$.

Пусть в вершинах по кругу расставлены числа $x_1, \ldots, x_{100}$, и пусть k – сумма «красных» чисел, а s – «синих». Тогда сумма красных чисел равна сумме всех одночленов вида $x_i x_j$, где i и j разной четности и $i < j$, а сумма синих равна сумме всех одночленов вида $x_i x_j$, где i и j одной четности и $i < j$; кроме того, $(x_1)^2 + (x_2)^2 + \ldots$ $\ldots + (x_{100})^2 = 1$. Заметим теперь, что выражение $(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{99} - x_{100})^2$ равно $1 - 2k +$ $+ 2s$ и неотрицательно, откуда $k - s \le \frac{1}{2}$.

Равенство достигается, когда выражение в скобках равно нулю, например, при $x_1 = x_2 = \ldots$ $\ldots = x_{100} = \frac{1}{10}$.

5. При всех четных n.

Пронумеруем столбцы и строки от 1 до n соответственно слева направо и сверху вниз, а также раскрасим доску в шахматном порядке так, чтобы угловая клетка в первом столбце и первой строке была черной.

Пусть n четное. Заполним таблицу числами от 1 до n^2 так: ставим их друг за другом, начиная от 1, сначала в первой строке слева направо, а потом – вдоль столбцов: вниз по последнему столбцу, вверх по предпоследнему и т.д. (получается что-то похожее на змейку). В итоге число n^2 окажется прямо под 1 – см. пример для $n = 6$ на рисунке 10.

1	2	3	4	5	6
36	27	26	17	16	7
35	28	25	18	15	8
34	29	24	19	14	9
33	30	23	20	13	10
32	31	22	21	12	11

Рис. 10

1	2	3	4	5	0
0	3	2	5	4	1
5	4	1	0	3	2
4	5	0	1	2	3
3	0	5	2	1	4
2	1	4	3	0	5

Рис. 11

Заменим теперь числа на их остатки по модулю n: 0, 1, …, $n-1$ (рис.11). Нетрудно доказать, что они расставлены следующим образом: для нечетного столбца последнее (нижнее) число совпадает с первым числом следующего четного столбца и со вторым числом следующего нечетного.

Значит, каждый столбец начинается с остатка i, равного своему номеру, кроме n-го, который начинается с нуля, причем в четных столбцах остатки идут по возрастанию с i до $n-1$, а потом с нуля до $i-1$, а в нечетных – по убыванию с i до 0, а потом с $n-1$ до $i+1$.

Докажем, что в каждой строке все остатки различны. Пусть в какой-то строке совпали два остатка. Они не могут находиться в столбцах одной четности – такие столбцы получаются друг из друга циклическим сдвигом. Значит, один остаток находится в четном столбце, а второй – в нечетном. Но тогда эти два остатка стоят на клетках разного цвета и не могут совпадать. Противоречие.

Предположим, что удалось заполнить таблицу при нечетном n. Заменим числа на их остатки от деления на n и проведем стрелку из каждой клетки с единицей в соседнюю клетку с двойкой. У нас имеется n стрелок, соединяющих единицы и двойки. У некоторых стрелок могут быть *парные* – стрелки противоположного направления, занимающие те же два ряда (рис.12,*а*). Но число стрелок нечетно, поэтому найдется стрелка без пары. Пусть, например, такая стрелка горизонтальна и ведет из i-го столбца в $(i+1)$-й (рис.12,*б*). В

а)

	1 →	2	
	2 ←	1	

б)

	i	$i+1$	$i+2$	$i+3$			n
				1 →	2		
		1 →	2				
							1
			1 →	2			
						1 →	2
	1 →	2					

Рис. 12

$(i+1)$-м столбце тоже есть единица. Поскольку у первой стрелки нет пары, вторая стрелка может вести только в $(i+2)$-й столбец (двойка в $(i+1)$-м столбце уже занята). В $(i+2)$-м столбце тоже есть единица, и стрелка из нее может вести только в $(i+3)$-й столбец (двойки в $(i+1)$-м и $(i+2)$-м столбцах уже заняты). Продолжая, дойдем до единицы в n-м столбце, откуда стрелке идти уже некуда. Противоречие.

6. 150°.

Пусть высота BM треугольника ABC пересекается с прямой AK в точке O (рис.13). Тогда $\angle COM = \angle AOM = 60°$. Значит, $\angle AOC = 120°$ и $\angle COB = 120°$. Следовательно, треугольники BOC и KOC равны по двум сторонам и углу,

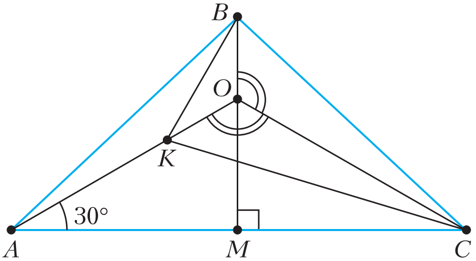


Рис. 13

лежащему против *большей* из них (так называемый четвертый признак равенства треугольников). Поэтому $OB = OK$, т.е. треугольник BOK равнобедренный с углом 120° при вершине O. Поэтому $\angle OKB = 30°$, а $\angle AKB = 150°$.

7. 3920000.

Оценка. Будем считать, что камни в кучках лежат один на другом, причем из выбранных кучек Петя берет верхние (на данный момент) камни. Пронумеруем камни в каждой кучке снизу вверх числами от 1 до 400. Тогда число очков, которое Петя получает на каждом ходу, равно разности номеров удаляемых камней. В результате он получит сумму вида $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + \ldots$ $\ldots + |a_{39999} - a_{40000}|$, где a_i – номера соответствующих камней.

Заметим, что после раскрытия скобок получается алгебраическая сумма S ста чисел 400, ста чисел 399, …, ста двоек и ста единиц, причем ровно перед половиной этих чисел стоит знак минус.

Назовем числа от 1 до 200 *маленькими*, а остальные – *большими*. Если бы разрешалось брать из кучек произвольные камни, то максимальное значение S, очевидно, достигается, когда все большие числа входят в S со знаком плюс, а все маленькие – со знаком минус. Такая сумма равна

$$100(400 + 399 + \ldots + 201 - 200 - 199 - \ldots - 1) =$$
$$= 100((400 - 200) + (399 - 199) + \ldots + (201 - 1)) =$$
$$= 100 \cdot 200^2 .$$

Заметим, однако, что каждое большое число хотя бы один раз войдет в сумму со знаком минус: это произойдет, например, в тот момент, когда Петя *в первый раз* удалит камень с этим номером. Аналогично, каждое из 200 маленьких чисел хотя бы один раз войдет в сумму со знаком плюс (в тот момент, когда Петя удалит *последний* камень с этим номером). Поэтому максимальный результат Пети не превышает

$$99 \cdot (400 + 399 + \ldots + 201) - 99 \cdot (200 + 199 + \ldots + 1) -$$
$$-(400 + 399 + \ldots + 201) + (200 + 199 + \ldots + 1) =$$
$$= 98 \cdot 200^2 .$$

Пример. Добиться указанного результата можно, например, так. За первые 200 ходов Петя забирает по 200 камней из первых двух кучек (при этом 200 больших чисел – каждое по разу – получают знак минус). За следующие 200 ходов он снимает 200 верхних камней из третьей кучки и 200 нижних из первой кучки, далее по 200 камней из второй и четвертой, третьей и шестой, …, 98-й и 100-й кучек (при этом все числа входят с «правильными» знаками). Наконец, остается по 200 нижних камней в последних двух кучках, которые и снимаются за последние 200 ходов (и возникает 200 знаков плюс перед числами с 200 по 1).

10–11 классы

1. Пусть исходное число имеет вид $\overline{AB}$, причем A при делении на 7 дает остаток r. Возьмем такую цифру a, что $2r + a$ делится на 7 (она, очевидно, найдется). Будем делить число вида $\overline{Aa\ldots aB}$ на 7 в столбик. Когда мы закончим делить A, останется остаток r. На следующем шаге мы будем делить на 7 число $10r + a = 7r + (2r + a) + r$, снова получается остаток r. На следующих шагах это повторяется, пока мы не дойдем до деления на 7 числа $\overline{rB}$, которое делится на 7 по условию.

5. а) Не может; б) может.

а) Пусть единичный квадрат $ABCD$ – проекция тетраэдра $ABCD'$ на плоскость грани ABC. Тогда этот тетраэдр «вписан» в прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$.

Из симметрии относительно плоскости DBD' ясно, что проекция тетраэдра на плоскость грани ACD' трапецией быть не может (если две противоположные стороны проекции параллельны, то и две другие тоже), а проекции тетраэдра на плоскости граней ABD' и BCD' равны. Высота CK тетраэдра, очевидно, совпадает с высотой прямоугольного треугольника BCC' (рис.14), поэтому проекция на плоскость ABD' – трапеция $ABKD'$. Так как треугольники BCC' и BKC подобны и $BC = 1$, имеем

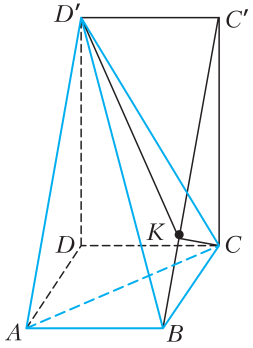


Рис. 14

$$BK = \frac{1}{BC'} = \frac{1}{AD'}.$$

Тогда

$$S_{ABKD'} = \frac{AD' + BK}{2} = \frac{AD' + \frac{1}{AD'}}{2} \geq 1.$$

Равенство возможно лишь при $AD' = \frac{1}{AD'} = 1$, но это не так, поскольку гипотенуза AD' больше катета AD, равного 1. Итак, ответ в пункте а) отрицателен.

б) Ответ в пункте б) положителен: достаточно выбрать DD' так, чтобы $AD' + \frac{1}{AD'} = 2 \cdot 2019$, а потом уменьшить длины всех ребер тетраэдра в $\sqrt{2019}$ раз.

6. Да.

Покажем, как может действовать Вася, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети.

Допустим, Петя не взял карточку, на которой написано $x_6x_7x_8x_9x_{10}$. Тогда Вася может взять эту карточку, а дальше брать любые карточки. При $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 1$ сумма произведений у Пети будет равна 0, а у Васи будет равна 1.

Если Петя сразу же взял карточку, на которой написано $x_6x_7x_8x_9x_{10}$, то Вася может взять карточку, на которой написано $x_5x_7x_8x_9x_{10}$, а следующим ходом одну из карточек $x_4x_7x_8x_9x_{10}$ или $x_5x_6x_8x_9x_{10}$ (хотя бы одна из них останется, поскольку за ход Петя может взять только одну из этих двух карточек). Далее Вася может брать карточки как угодно.

В случае, если Вася взял карточку $x_4x_7x_8x_9x_{10}$, он может присвоить переменным такие значения: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = x_5 = x_6 = 1$, $x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 100$.

Тогда только на двадцати одной карточке окажется ненулевое произведение, причем для трех карточек $x_4x_7x_8x_9x_{10}$, $x_5x_7x_8x_9x_{10}$ и $x_6x_7x_8x_9x_{10}$ это произведение будет равно 100000000, а для остальных не будет превосходить 1000000. Таким образом, сумма у Васи будет не меньше 200000000, а у Пети не больше 118000000.

В случае, если Вася взял карточку $x_5x_6x_8x_9x_{10}$, он может присвоить переменным такие значения: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = x_6 = x_7 = 1$, $x_8 = x_9 = x_{10} = 10$.

Тогда только на шести карточках окажется ненулевое произведение, причем для трех карточек $x_5x_6x_8x_9x_{10}$, $x_5x_7x_8x_9x_{10}$ и $x_6x_7x_8x_9x_{10}$ это произведение будет равно 1000, а для остальных трех будет равно 100. Таким образом, сумма у Васи будет не меньше 2000, а у Пети не больше 1300.

УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

1. Будем называть *лесенкой* следующую часть таблицы из $n + (n-1) + \ldots + 1$ клеток: самый левый столбец, следующий столбец без верхнего числа, следующий столбец без двух верхних чисел, …, самый правый столбец без верхних $n - 1$ чисел.

Пример. Двигаясь от самого левого столбца лесенки к самому правому, заполняем их снизу вверх числами 1, 2, … по возрастанию: в первом столбце лесенки будут стоять числа от 1 до n, во втором – от $n + 1$ до $2n - 1$ и т.д. Заполнив лесенку, заполняем оставшиеся клетки таблицы по тому же принципу: двигаясь от самого левого столбца таблицы к самому правому, заполняем их снизу вверх оставшимися числами по возрастанию. Тогда таблица будет удовлетворять условию, а сумма чисел на главной диагонали будет равна

$$n + [n + (n-1)] + [n + (n-1) + (n-2)] + \ldots$$
$$\ldots + [n + \ldots + 1] = n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2,$$

что и требуется.

Оценка. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ – числа на главной диагонали (порядок, в котором они там стоят, нам неизвестен). Для каждого a_k покрасим само a_k и все числа, стоящие либо под a_k в том же столбце, либо слева от a_k в той же строке, в цвет номер k. Тогда чисел каждого цвета будет ровно n, и каждое число лесенки, кроме чисел главной диагонали, будет покрашено ровно в два цвета – «цвет строки» и «цвет столбца» (а каждое число на главной диагонали – только в один свой цвет).

Заметим, что a_k больше всех остальных чисел цвета k и больше всех чисел, цвет которых имеет номер меньше k (так как $a_k > a_{k-1} > \ldots > a_1$). Тем самым a_k не меньше, чем количество чисел с цветами от 1 до k. Но таких чисел ровно $n + (n-1) + \ldots + (n-(k-1))$, поскольку чисел цвета 1 ровно n, чисел цвета 2, но не цвета 1, ровно $n-1$, …, чисел цвета k, но ни одного из цветов 1, 2, …, $k-1$, ровно $n-(k-1)$.

Отсюда

$$a_1 + \ldots + a_n \geq n + [n + (n-1)] + \ldots$$
$$\ldots + [n + (n-1) + \ldots + 2 + 1] = n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 1^2.$$

2. Может.

Отметим на планете полюсы N и S, и пусть точки A, B, C и D делят соответствующий экватор на четыре равные дуги, как на рисунке 15.

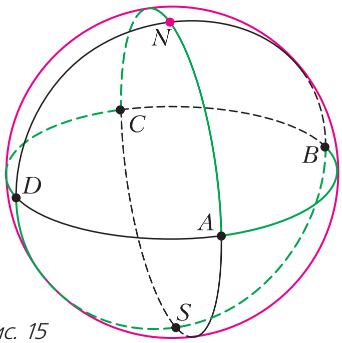


Рис. 15

Рассмотрим замкнутый путь $A \to B \to S \to D \to$ $\to C \to N \to A$ по поверхности, состоящий из дуг больших окружностей с центрами в центре планеты. Этот путь состоит из 6 одинаковых дуг длиной в $1/4$ экватора, поэтому длина пути составляет 600 км.

Покажем, что луноход побывал на расстоянии не более 50 км от каждой точки. Поверхность планеты разобьем на 8 одинаковых сферических треугольников с вершинами в отмеченных точках. Луноход побывал во всех вершинах и во всех точках хотя бы одной стороны каждого треугольника. Так как расстояние по поверхности от полюса до экватора 100 км, то поверхность планеты разбивается на экваториальный пояс – точки, удаленные от экватора на расстояние не более 50 км, и две полярные шапки – точки, удаленные от полюсов на расстояние не более 50 км. На рисунке 16 зеленая часть треугольника исследована луноходом, так как он проехал вдоль стороны, а красная исследована, так как он побывал в вершине.

Замечание. Докажем более сильное утверждение: луноход может полностью исследовать планету, преодолев не более 570 км.

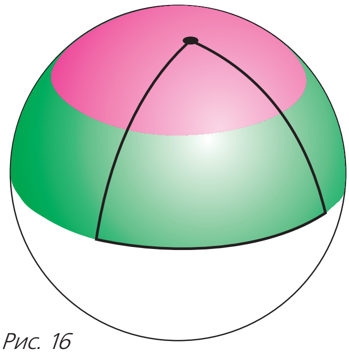


Рис. 16

Снова разобьем поверхность планеты на 8 равных треугольников. Средней параллелью треугольника назовем часть линии, параллельной стороне треугольника и соединяющей середины двух других сторон. На рисунке 16 средняя параллель треугольника лежит на границе красной и зеленой областей. Пусть луноход прошел по средним параллелям всех треугольников, как на рисунке 17. Вся поверхность планеты будет исследована, потому что любая точка треугольника находится

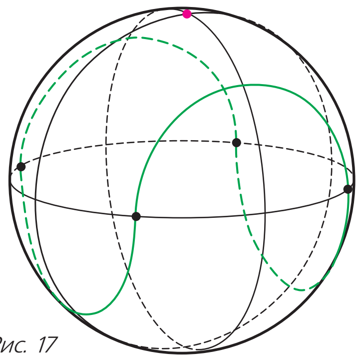


Рис. 17

на расстоянии не более 50 км от некоторой точки средней параллели, что видно из рисунка 16.

Наконец, докажем, что длина окружности, на которой лежит средняя параллель, в $\sqrt{2}$ раз меньше длины экватора. Из этого будет следовать, что длина пути равна $\dfrac{800}{\sqrt{2}}$, что примерно равно 566.

Пусть N и E – вершины треугольника, O – центр планеты. Радиус окружности, на которой лежит средняя параллель, равен расстоянию r от середины M дуги NE до прямой ON. Из рисунка 18 видно, что $r = \dfrac{OE}{\sqrt{2}}$. Значит, радиус меньшей окружности в $\sqrt{2}$ раз меньше радиуса планеты, что и требовалось.

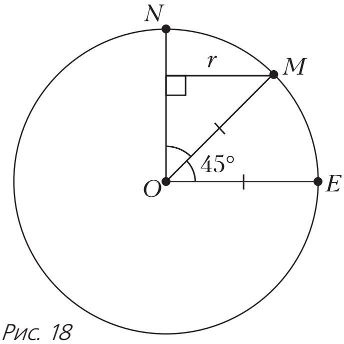


Рис. 18

Интересно было бы узнать, какова наименьшая возможная длина такого пути. Можно доказать (правда, не совсем элементарно), что она заведомо больше 500.

3. Да.

Введем на плоскости декартовы координаты $(x;y)$ и рассмотрим всевозможные параболы с уравнениями вида $y = ax^2 + \ln a$, где a – произвольное положительное число. Среди этих парабол нет одинаковых, так как коэффициенты при x^2 различны. (Если совместить вершины двух парабол, а также их оси с учетом направления, то парабола, у которой a больше, пойдет между «рогами» другой.)

Зафиксируем произвольное x, и пусть a пробегает положительную полуось. Тогда $y = ax^2 + \ln a$ является непрерывной функцией от a. Поскольку $x^2 \ge 0$, величина ax^2 не убывает с ростом a. Функция $\ln a$ строго возрастает. Поэтому y строго возрастает по a как сумма неубывающей и строго возрастающей функций. При $a \to +\infty$ имеем $y \to +\infty$, а при $a \to 0$ имеем $y \to -\infty$. Значит, каждое значение y при данном x появится ровно один раз. Поэтому любая точка плоскости принадлежит ровно одной параболе.

Комментарий. Вместо $\ln a$ можно взять любую непрерывную строго возрастающую функцию от a, которая отображает положительную полуось на всю вещественную ось.

4. Заметим, что любые два из чисел x, y, z взаимно просты. Действительно, пусть, например, x и y имеют общий простой делитель p. Тогда $z^2 = 2(xy + yz + xz) - x^2 - y^2$ также делится на p, а потому на p делится и z. Значит, $\text{НОД}(x,y,z)$ делится на p, но это противоречит условию.

Теперь заметим, что

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) = \\ = \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx\right) - 4xy = \\ = (x + y - z)^2 - 4xy.$$

Таким образом, $4xy$ является полным квадратом. Так как 4 – полный квадрат, то и xy – полный квадрат. А так как x и y взаимно просты, то каждое из них – полный квадрат. Аналогично, и z – полный квадрат.

6. Пусть AM, AN – внутренняя и внешняя биссектрисы треугольника, а T – точка пересечения AM и KL. Тогда KL проходит через N. Кроме того, непосредственный подсчет углов показывает, что прямые AP и KL образуют равные углы с AM. (Например, при $AB < AC$ имеем $\angle MAP = \angle MAB + \angle BAP = \angle CAM + \angle LKA = \angle LTA$.) Поэтому надо доказать, что прямая, проходящая через J и параллельная KL, пересекает BC в той же точке, что и прямая, проходящая через середину U отрезка AJ и параллельная AN, т.е. что $MJ/JT = MU/UA$. А это равенство следует из того, что четверка A, J, T, M гармоническая (т.е. $MJ/MA = TJ/TA$).

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.А.Аткарская, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»

Телефон: +7 495 363-48-86, htpp: //capitalpress.ru

ЧемпионскаЯ ИГРА

В 2019 году обладатель мировой короны Магнус Карлсен демонстрирует по-настоящему чемпионскую игру, выигрывая один супертурнир за другим. А его отрыв в текущем рейтинг-листе ФИДЕ от ближайшего преследователя, Ф.Каруаны, составляет уже почти 50 пунктов. После победы на Мемориале Гашимова в Шамкире, отвечая на вопрос журналиста, согласен ли Магнус с тем, что сейчас мы живем в эпоху Карлсена, чемпион с улыбкой ответил, что она длится уже несколько лет. Нескромно, но справедливо!

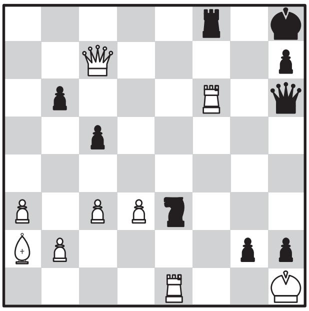
В этом выпуске мы рассмотрим свежие примеры из творчества Магнуса Карлсена, в которых жертвами виртуозной игры норвежца стали ведущие российские гроссмейстеры.

П.Свидлер – М.Карлсен

Баден-Баден, 2019

1.e4 c5 2. ♘f3 ♞c6 3. ♘c3 e5 4. ♗c4 ♝e7 5. d3 d6 6. ♘d2 ♞f6 7. ♘f1 ♞d7 8. ♘d5 ♞b6 9. ♘b6 ab 10. c3 0-0 11. ♘e3 ♝g5 12. 0-0 ♚h8 13. a3?! (за инициативу можно было бороться так: 13. ♘d5 ♝c1 14. ♕c1 f5 15. f4!) **13...f5 14. ♘f5 ♝c1 15. ♖c1 ♝f5 16. ef d5 17. ♗a2** (сильнее 17. ♗b5!?, форсируя размен легких фигур после 17...♜f5 18. ♗c6 bc 19. c4) **17...♜f5 18. ♕g4 ♜f6 19. f4?!** Преждевременно. Лучше было включить предварительное 19. g3!? с равной игрой. **19...ef 20. ♕g5 ♛f8!** По-видимому, белые упустили этот сильный ход в предварительных расчетах, теперь черные начинают атаку за счет лучшей координации фигур. **21. ♕d5 ♜d8 22. ♕f3?** С расчетом заманить коня на d3, но черные находят лучшее поле для него. Сильнее активное 22. ♕g5 с шансами на успех. **22... ♞e5 23. ♕e4 ♞g4! 24. ♖ce1 ♞e3.** Черный конь занял доминирующую позицию в лагере белых, позволяя провести атаку на королевском фланге. На шахматном сленге такого коня иногда называют «осьминогом». **25. ♖f2 ♜e8 26. ♕b7 g5!** Пешечное наступление решает исход партии. **27. ♖fe2 g4 28. ♖f2 ♛h6 29. ♕c7 ♜ef8 30. h3 gh 31. g3 fg.** Белым пора сдаваться, однако П.Свидлер в духе старых мастеров дает возможность Магнусу поставить красивый мат пешками. **32. ♖f6 h2+ 33. ♔h1 g2×. Выигрыш черных.**

Мат – редкий гость в партиях современных гроссмейстеров, поэтому финальная позиция достойна отдельной диаграммы.

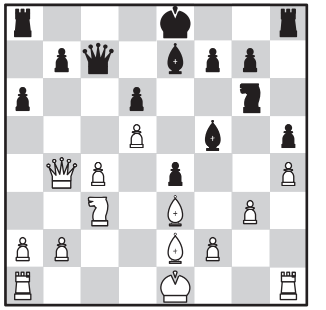


С.Карякин – М.Карлсен

Шамкир, 2019

1.e4 c5 2. ♘f3 ♞c6 3. d4 cd 4. ♘d4 ♞f6 5. ♘c3 e5 6. ♘db5 d6 7. ♘d5 ♞d5 8. ed ♞e7 9. c4 ♞g6 10. ♕a4 ♝d7 11. ♕b4 ♝f5 12. ♕a4 ♝d7 13. ♕b4 ♝f5. В силу турнирного положения, черные были согласны на повторение ходов, однако С.Карякин решил продолжить борьбу. **14. h4 h5 15. ♗g5 ♛b8 16. ♗e2 a6 17. ♘c3 ♛c7 18. g3 ♝e7 19. ♗e3 e4!** Ключевой ход в равной позиции, обозначающий намерение черных использовать слабость полей f3 и d3.

20.0-0 0-0! Жертвуя пешку, черные рассчитывают потратить



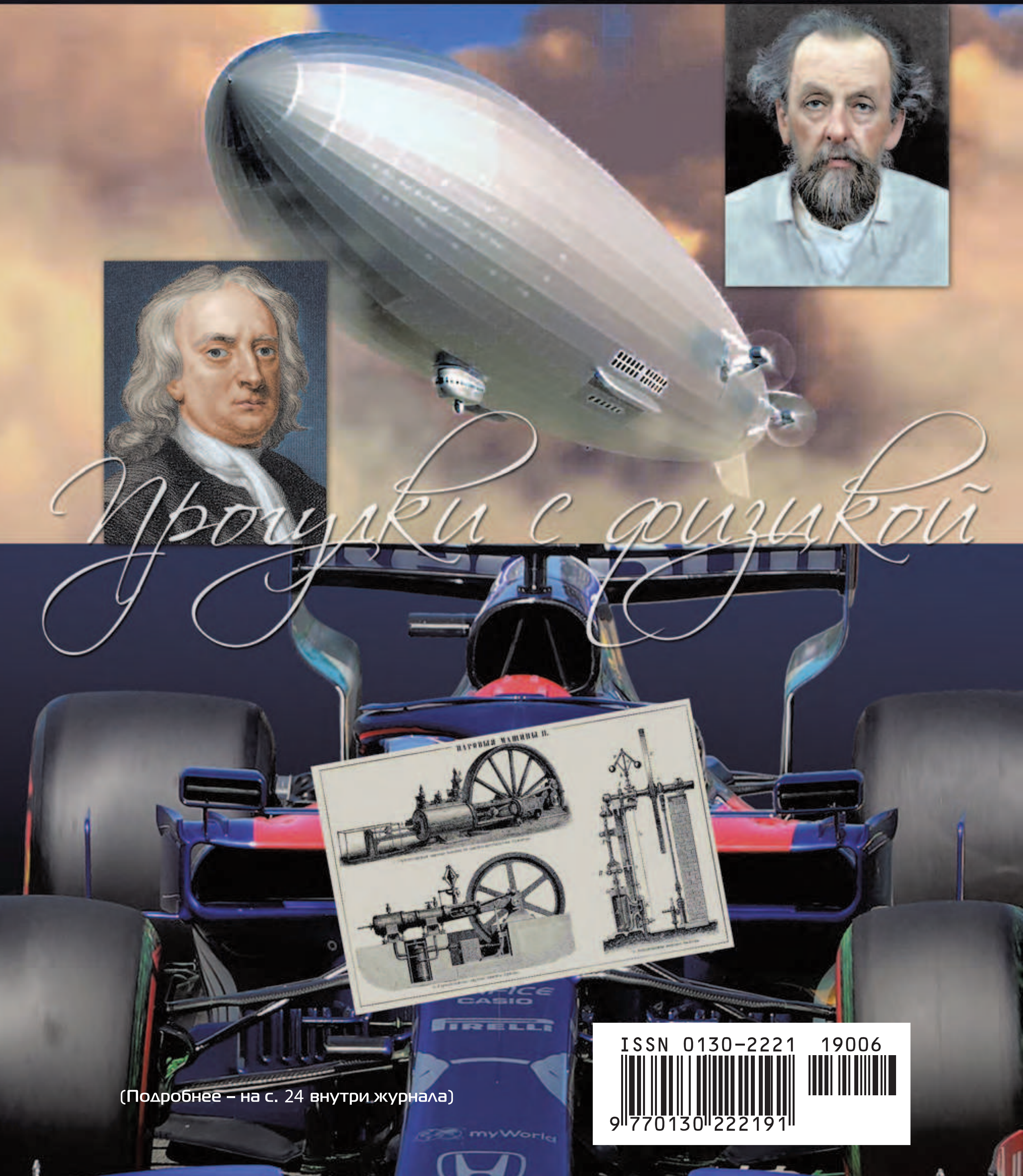
выигранные темпы на подготовку атаки на королевском фланге. **21. ♗h5 ♞e5 22. ♗e2 ♛d7 23. ♕a4 ♛c8 24. c5 dc 25. ♘e4 c4 26. ♘c3?!** (Первая неточность, позволяющая черным оттеснить коня на край доски и получить преимущество в центре. Необходимо было сохранить центральное положение коня путем 26. ♕c2! ♜e8 27. ♖ad1.) **26...b5 27. ♕d1 b4 28. ♘a4 ♝e4 29. ♕d4 ♛f5 30. f4?** (Вторая неточность, решающая. Шанс белых заключался в жертве пешки: 30. f3! ♞f3 31. ♖f3 ♝f3 32. ♖f1.) **30... ♛g6!** Чемпион мира находит сильнейший ход, позволяющий использовать ферзя в атаке по ослабленным белым полям. **31. ♗f2 ♞d3!** Еще один пример «коня-осьминога», носящий имя «коня Каспарова»: в 1985 году в матче с Карповым на первенство мира Каспаров маневром коня на d3 сковал позицию белых. **32. h5 ♛f5 33. ♗g4 ♛g4 34. ♕e4 ♝d6 35. ♕g2** (на 35. ♕e4 решает 35...♞f4) **35... ♜ae8 36. ♗d4 ♛h5 37. ♕f3 ♛g6 38. ♔h1 ♜e4 39. ♗f2 ♜fe8**, на доске материальное равенство, но белые бессильны против активных черных фигур и поэтому предпочли сложить оружие. **Выигрыш черных.**

А.Русанов

Индекс 90964

СРЕДСТВА ПЕРЕДВИЖЕНИЯ: ВЧЕРА, СЕГОДНЯ, ЗАВТРА

Зачем повозке нужны большие колеса,
автомобилю – крылья, парусной яхте – большой киль ...



(Подробнее – на с. 24 внутри журнала)

ISSN 0130-2221 19006
9 770130 222191